

כללי סוד העיבור והתכונה

שחיבר החכם השלם התוכן הגדול

ר' רפאל סג"ל מק"ק הנובר

יוצא לאור על פי כתב-יד יחיד בעולם

אשר בספריית בודליאן באוקספורד

המהדיר והמפרש

יוסף יצחק איידלר

מהנדס אזרחי

בריסל-בלגיה

מחבר הספר הלכות קידוש החודש על-פי הרמב"ם

תשע"א

Principles of Intercalation and Astronomy

by

Raphael Levi of Hanover

Edited from a Unique Manuscript

In the Bodleian Library of Oxford

Edited and Commented by

Ir. J. Jean Ajdler
Civil Engineer
Brussels-Belgium
2011

Introduction.

Raphael Levi from Hanover (1685-1779) was considered in his time as an exceptional mathematician and astronomer and a very skilful calculator. He was known as the author of two books written in Hebrew and published at about the same time in 1756. The first is his *Luhot ha-Ibbur*, in fact two books printed separately, in 1756 and 1757 at one year interval. It is a remarkable book written in an elegant Hebrew, printed in very nice characters. It is however difficult to understand because of the absence of a third part which was never printed, which was intended to explain and justifying the two first parts.

A second book of him was edited without his authorization by Rabbi Moses of Tiktin who bought the manuscript from one of Hanover's pupils in a public auction. This book, even if it has not the formal perfection that Hanover had required before its printing, has the merit to expound clearly the understanding of Maimonides' famous treatise *Hilkhot Kiddush ha-Hodesh* by Hanover. The book gives mainly a qualitative description of Maimonides' methods and concepts and a clear definition of different astronomical parameters adopted by Maimonides; it allows a reader not familiar with the ancient astronomy to get acquainted with it. And I, indeed, personally used and studied it before trying to understand Ptolemy and al-Battani. At the end of this book, astronomical tables are gathered and it appears that the author adopted his epoch in Tishri 1729; this date is probably close to the date of composition of this book.

Hanover let three other books in manuscript. These books are uncompleted and the author considered certainly that they had not yet reached the formal perfection that Hanover had required before their printing. The present book, which I called in reference of the beginning of the book *סוד העיבור והתכונה* is rather an abstract of the subjects that he was teaching; it presents the form of lectures' notes and it is dubious whether he had checked it because there are some errors in the text, the notations and the drawings.

We have no precise data about the date of the composition. However the use in his calculations of his epoch of Tishri 1729 would allow to assume that this book was composed in about this period. We note that this epoch of Tishri 1729 was used in the present book in *Hokhmat ha-Tekhunah* and in the printed version of *Tekhunat ha-Shamayim* (in chapter 59 and in the Table p. 34 at the end of the book). By contrast in the printed book *Lukhot ha-Ibbur II*, (1756-1757) he used a more sophisticated system putting his epoch at the astronomical mean conjunction associated with the molad of Beharad at the epoch of the Jewish era. In the book *Tekhunat ha-Shamayim ha-Arokh* (the version in manuscript) he used the epoch of Tishri 1729 in the same chapter 59 but later at the end of the book, p. 104,¹ when he checked the different epochs used by Maimonides and the different commentators of *Hilkhot Kiddush ha-Hodesh* who preceded him, he referred to his new method and noted its great advantage avoiding to count the number of days elapsed since the epoch. The author noted indeed about this

¹ Of the virtual edition.

new method of calculation, working with an epoch at the beginning of the era of Behard or more exactly at the mean astronomical conjunction corresponding to the Molad of Behard:

ושנית שהלוחות שיסדתי הם נכונים והמפרשים טועים בחשבונם ובפרת המחבר מהור"ר יהונתן. תקח הימים שבין העיקרים שכתבו ותחשוב ע"י הלוחות ותמצא טעותם. ועל כל זה יהיה החשבון ע"י הלוחות שחיברתי בקיצור נמרץ ואין צריכין לסך הימים שבין שני עיקרים.

The composition of this last book would have extended to a much longer span of time. The present book seems to be a collection of notes written by a student rather than the copy by a student of Hanover own notes. Indeed we observe a number of mistakes in the text and in the drawings which would not exist in the case of the existence of a basis textbook.

Among the different subjects considered, two points deserve a special attention.

1. In the present book we find the following text² (p. 9) about the extremely rare eventuality to see the new moon on the evening preceding the day before the Neomenia (the yom ha-keviyah):

וכן אפשר בחדשים הקודמים בזה המשל שיהיה יום הראייה קודם ליום הקביעה כמו שכתב הרב הראב"ע אמור אבל בדרך אחר אי אפשר שיום הראייה יהיה קודם ליום הקביעה יום אחד והוא פלא כי צריך להיות מולד אמצעי בתשרי ב- ג ט ר"ד וצריך להיות שנה פשוטה וגם צריך להיות הקיבוץ מוקדם לאמצעי כדי שיהיה ריוח בין רגע קיבוץ עד עת הראייה יתר מן ר"ד שעות וצריך שיהי רוחב הירח צפוני חמש מעלות ודבר זה שיהיו כל התנאים הממהרים הראייה ביחד הוא פלא גדול ואפשר שלא המצא תמצא בחמש מאות שנים וכבר יגעת א"ע ומצאתי תאמין שחקרתי וחפשתי בחיפוש אחר חיפוש משנת 4000 עד שנת 5000 ליצירה ולא מצאתי רק במשל אחד בשנת 34683³ שהיה מולד אמצעי בתשרי ג. ט. תמ"א ונדחה לחמישי ונראה הירח בליל ד' והיה יום הראייה ביום ד' יום אחד מוקדם ליום הקביעה

This outcome is really exceptional; Hanover could with a rather primitive lunar theory and Maimonides' theory of the new crescent's visibility by manual calculation find the only case in a period of five hundred years, when the moon was seen on the last day of the preceding month.

2. The postponements in the Jewish calendar.

In the beginning of the present book⁴ the author explains and justifies the postponement rules of the Jewish calendar by a fundamental and general rule which he presents without justification as a general principle that the first day of any Jewish month may not fall before the day of the true conjunction. He writes indeed:⁵

² See p. 16.

³ This corresponds to Tishri 922. This exceptional case is known in the Jewish literature surrounding the dispute between Sa'adia Gaon and Ben Meir. The discovery of this exceptional case by Hanover through manual calculations is amazing. Later Hanover found a second case as he noted at the end of his Tekhunat ha-Shamayim ha-Arokh p. 137 that a similar phenomenon happened in Tishri 5275.

⁴ See virtual edition of this manuscript.

⁵ Beginning of the book p. 11.

דע בזמן שאין שם סנהדרין בא"י או סמוכים, אין רשות לקבוע החדשים והמועדות על פי הראייה. וראוי להיות יום הקביעה מכל החדשים או ביום קיבוץ האמיתי או ביום אחר קיבוץ אמיתי, אבל לא קודם לו כמו בעיבור השנה צריך להיות פסח או ביום תקופת ניסן האמיתי או לאחריו אבל לו קודם יום תקופה אמיתי.

In his book *Sefer Tekhumat ha-Shamayim ha-Arokh folio 22a* of the manuscript,⁶ chapter 71 (ancient numbering) 82 (new numbering), he wrote more in detail:

ואולם בזמן שאין שם סנהדרין או סמוכים בא"י אין לנו רשות לקבוע החדשים והמועדות על פי ראיית הירח אלא קובעין כל ר"ח או ביום קיבוץ האמיתי או ביום אחר קיבוץ האמיתי אבל אין לנו רשות לקבוע ר"ח קודם יום שבו קיבוץ האמיתי שנאמר החדש הזה לכם ולא נקרא החדש אלא יום קיבוץ אמיתי שהוא חידוש הירח באמת ואין הקביעות שלנו יוכל להיות ע"פ מולד האמצעי שלא ע"פ הראייה. ובעבור שהשנת הירח ר"ל י"ב חדשי הירח עולים ל- שנ"ד ימים ח' שעות תתע"ו חלקי תתר"ף והם עולים לששה חדשים מלאים משלשים יום וששה חדשים חזרים מ- כ"ט יום ושנה כזו נקרא שנת כסדרן ויהיה ראש כל חודש מהמלאים ביום המולד וראש כל חודש מהחסרים ביום אחר המולד. אבל בעבור שהקיבוץ האמיתי לפעמים מאוחר למולד עד יום שלאחריו ואי אפשר לקבוע ר"ח קודם יום שבו קיבוץ האמיתי כדאמרין, משום זה צריכין אנו לדחות איזה ראש חדשים מיום המולד עד יום שלאחריו. ואולם שהחשבון מקיבוץ האמיתי לאו כל אדם יכול ללמוד אותו כי הוא חשבון ארוך וצריך לידיעות והקדמות רבות, לפיכך הרחיב לנו המסדר סדר עיבור שלנו חשבון קצר, ר"ל חשבון האמצעי ונתן לנו איזה כללים, והם ארבע דחיות כדי שיכולין לתקן כל השנה ע"י דחיית ראש חודש תשרי מיום הולדו ועל ידו אנו בטוחים שלא יקבע ר"ח אחר מהחדשי השנה שעבר קודם יום קיבוץ האמיתי. אלא תמיד יהיה ראש חודש בקביעת שלנו או ביום קיבוץ האמיתי או ביום שלאחריו. ואני יגעתי וחשבתי משנת 4100 כי באותו זמן היה הלל הנשיא והוא היה בעל המסדרן סדר חשבון העיבור לכל הדיעות עד שנת 4200 ר"ל מן מאה שנה קיבוץ האמיתי לכל החדשים ומצאתי פלא זה שאמרתי, עיין בסוף הספר.

And at the end of the same book, on the last page of the manuscript (p.136 of our virtual edition) he wrote:

מן חשבון קיבוץ אמיתי מן מאה שנה כמו שתראה בלוח מצינו אמיתת הטעם שכתבנו בפרק ז' לדחיות הארבע וכן לשאר סדר וכללים שכתבנו לנו ממסדר [י] חשבון [העיבור] וכללו הוא זה כדי לפגוע ביום קיבוץ האמיתי ר"ל שיהיו כל קביעות ראשי חדשים [ביום] קיבוץ אמיתי או לאחריו אבל אינן יכולים לקבוע ר"ח ביום שקודם לקיבוץ אמיתי.

Hanover mentions thus explicitly the quotation from *Hilkhhot Kiddush ha-Hodesh 7: 7*:
כדי לפגוע ביום קיבוץ האמיתי.

It appears that Hanover's rule refers to this quotation and represents in fact his understanding of the former quotation. Hanover writes that he checked all the years between 4100 and 4200, which represents the calculation of 185 true conjunctions and he never found his rule to be wrong.

Our aim is to check this statement and this rule. With this aim in view we constructed two tables, the first for the seven types of ordinary years and the second for the seven types of leap years. In each table we gave for each type of year, the last possible Molad of each

⁶ This chapter has no equivalent in the printed version of *Tekhumat ha-Shamayim*, Amsterdam 1756; it remained in manuscript. The second part of this book including a complete commentary on *Hilkhhot Kiddush ha-Hodesh*, Talmudical novellae with a mathematical character and tables will appear in a virtual edition.

month. We departed from the four gates' table⁷ and in the case of the years which have different areas of possible Molad in function of their position in the cycle of 19 years, we chose the latest Molad.

Now we know that the true conjunction can follow the mean conjunction by a span of time which does not overstep the limits of 6 hours in Tishri and 14 hours in Nisan.⁸ On this basis we constructed the table 3 on the assumption that the maximum delay of the true conjunction with regard to the mean conjunction can be considered as linearly proportional during the year.⁹

We know further that today the Molad does not more represent the mean conjunction; the Molad is delayed by about 2 hours. In Maimonides' days this delay was about 50 minutes.¹⁰ It is certain that at the beginning of the Jewish calendar the Molad represented for the meabrim the mean conjunction.

Thus if we want to check today the possibility to find cases where the true conjunction falls on the day following the yom ha-keviyah, we must subtract 2 hours from the latest possible Molad of each month before adding the maximum possible span of time between the mean conjunction and the following true conjunction.

However as we want to screen all the years elapsed since the inception of the Jewish calendar we must consider the case when the Molad coincided with the mean conjunction.

In tables 1 and 2 we colored in green the background of the squares where the latest true conjunction corresponding to the Molad falls on the day following the yom ha-keviyah and we indicated the moment of this last possible true conjunction under the value of the latest Molad. This allows estimating how far the true conjunction can trespass on the following day. It is evident that the probability of meeting such a situation of the true conjunction falling on the day after the yom ha-keviyah is proportional to the possible trespass of the latest possible true conjunction on the day following the yom ha-keviyah.

2. Tables for the fourteen types of years giving the yom ha-keviyah, the latest possible Molad and the latest true conjunctions trespassing on the day following the yom ha-keviyah.

The first table is related to the ordinary years and the second the leap years.

⁷ This table can be found in the books of Sar Shalom, Slonimski, Joffe. In *Hikhot Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam* it can be found on p. 223.

⁸ See *Sefer Tekhunat ha-Shamyim*, Amsterdam 1756 chap. 63 and 64 pp. 20-21. See Ibn Ezra *Shemot* 12: 2. See J. Ajdler, *Hikhot Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam* p. 216.

⁹ This is a simplifying assumption which is probably not exact.

¹⁰ See J. Ajdler, *Hikhot Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam* pp. 176-178.

שנים פשוטות

	ב ח ג		ב ש ה		ג כ ה		ה כ ז	
תשרי	ב	1-9-203	ב	2-17-1079	ג	3-9-203	ה	5-9-203
חשון	ד	2-21-996	ד	4-6-792	ה	4-21-996	ז	6-21-996
כסליו	ה	4-10-709	ו	5-19-505	ו	6-10-709	א	1-10-709
טבת	ו	5-23-622	א	0-8-218	א	7-23-622	ג	2-23-622
שבט	ז	7-12-335	ב	1-20-1011	ב	2-12-335	ד	4-12-336
אדר	ב	2-1-48	ד	3-9-724	ד	4-1-48	ו	6-1-48
ניסן	ג	3-13-841 4-3-841	ה	4-22-437	ה	5-13-841 6-3-841	ז	7-13-841 1-3-841
אייר	ה	5-2-544	ז	6-11-150	ז	7-2-554	ב	2-2-554
סיון	ו	6-15-267 7-2-627	א	0-23-943	א	1-15-267 2-2-627	ג	3-15-267 4-2-627
תמוז	א	1-3-1060	ג	2-12-656	ג	3-3-1060	ה	5-3-1060
אב	ב	2-16-773 3-1-413	ד	4-1-369	ד	4-16-773 5-1-413	ו	6-16-773 7-1-413
אלול	ד	4-5-426	ו	5-14-82	ו	6-5-486	א	1-5-486

	א ש ה		א ח ז		ז ש ג	
תשרי	ה	5-17-1079	ז	6-9-203	ז	7-17-1079
חשון	ז	7-6-792	ב	7-21-996	ב	2-6-792
כסליו	ב	1-19-505	ג	2-10-709	ד	3-19-505
טבת	ד	3-8-218	ד	3-23-622	ו	5-8-218
שבט	ה	4-20-1011	ה	5-12-336	ז	6-20-1011
אדר	ז	6-9-724	ז	7-1-48	ב	1-9-724
ניסן	א	7-22-437	א	1-13-841 2-3-841	ג	2-22-437
אייר	ג	2-11-150	ג	3-2-554	ה	4-11-150
סיון	ד	3-23-943	ד	4-15-267 5-2-627	ו	5-23-943
תמוז	ו	5-12-656	ו	6-3-1060	א	7-12-656
אב	ז	7-1-369	ז	7-16-773 1-1-413	ב	2-1-369
אלול	ב	1-14-82	ב	2-5-486	ד	3-14-82

Table 1: For each of the seven types of ordinary years we give the yom ha-keviyah and the latest possible Molad of all the months of the year. We consider then the latest possible true conjunctions on the basis of the maximum span of time between mean conjunctions and the following true conjunction. When the true conjunction trespass on the day following the yom ha-keviyah we color the corresponding square and indicate the latest possible true conjunction.

שנים מעוברות

	ב ח ה		ב ש ז		ג כ ז		ה ח א	
תשרי	ב	1 – 20 – 490	ב	2 – 17 – 1079	ג	3 – 17 – 1079	ה	4 – 11 – 694
חשון	ד	3 – 9 – 203	ד	4 – 6 – 792	ה	5 – 6 – 792	ז	6 – 0 – 407
כסליו	ה	4 – 21 – 996 5 – 6 – 218	ו	5 – 19 – 505	ו	6 – 19 – 505 7 – 3 – 807	ה	7 – 13 – 120
טבת	ו	6 – 10 – 709	א	0 – 8 – 218	א	1 – 8 – 218	ד	2 – 2 – 913
שבט	ז	7 – 23 – 422 1 – 9 – 1027	ב	1 – 20 – 1011	ב	2 – 20 – 1011 3 – 7 – 536	ה	3 – 15 – 626 4 – 2 – 151
אדר א'	ב	2 – 12 – 135	ד	3 – 9 – 724	ד	4 – 9 – 724	ז	5 – 4 – 339
אדר ב'	ד	4 – 0 – 928	ו	4 – 22 – 437	ו	5 – 22 – 437	ב	6 – 17 – 52
ניסן	ה	5 – 13 – 641 6 – 3 – 641	ז	6 – 11 – 150	ז	0 – 11 – 150 1 – 1 – 150	ג	1 – 5 – 845
אייר	ז	7 – 2 – 354	ב	0 – 23 – 943	ב	1 – 23 – 943	ה	2 – 18 – 558
סיון	א	1 – 15 – 67 2 – 2 – 427	ג	2 – 12 – 656	ג	3 – 12 – 656	ז	4 – 7 – 271
תמוז	ג	3 – 3 – 860	ה	4 – 1 – 369	ה	5 – 1 – 369	א	5 – 19 – 1064
אב	ד	4 – 16 – 573 5 – 1 – 213	ו	5 – 14 – 82	ו	6 – 14 – 82	ב	7 – 8 – 777
אלול	ו	6 – 5 – 286	א	0 – 2 – 875	א	1 – 2 – 875	ד	1 – 21 – 490

	ה ש ג		ז ח ג		ז ש ה	
תשרי	ה	5 – 17 – 1079	ז	6 – 20 – 490	ז	7 – 17 – 1079
חשון	ז	7 – 6 – 792	ב	1 – 9 – 203	ב	2 – 6 – 792
כסליו	ב	1 – 19 – 505	ג	2 – 21 – 996	ד	3 – 19 – 505
טבת	ד	3 – 8 – 218	ד	4 – 10 – 709	ו	5 – 8 – 218
שבט	ה	4 – 20 – 1011	ה	5 – 23 – 422 6 – 9 – 1027	ז	6 – 20 – 1011
אדר א'	ז	6 – 9 – 724	ז	7 – 12 – 135	ב	1 – 9 – 724
אדר ב'	ב	7 – 22 – 437	ב	2 – 0 – 928	ד	2 – 22 – 437
ניסן	ג	2 – 11 – 150	ג	3 – 13 – 641 4 – 3 – 641	ה	4 – 11 – 150
אייר	ה	3 – 23 – 943	ה	5 – 2 – 354	ז	5 – 23 – 943
סיון	ז	5 – 12 – 656	ו	6 – 15 – 67 7 – 2 – 427	א	7 – 12 – 656
תמוז	א	7 – 1 – 369	א	1 – 3 – 860	ג	2 – 1 – 369
אב	ב	1 – 14 – 82	ב	2 – 16 – 573 3 – 1 – 213	ד	3 – 14 – 82
אלול	ד	3 – 2 – 875	ד	4 – 5 – 286	ו	5 – 2 – 875

Table 2: idem table 1 for the seven types of leap years.

The latest true conjunction after the mean conjunction

	Ordinary years	Leap years
Tishri	6	6
Heshvan	7 – 360	7 – 151
Kislev	8 – 720	8 – 302
Tevet	10	9 – 454
Shevat	11 – 360	10 – 605
Adar I	12 – 720	11 – 756
Adar II		12 – 907
Nisan	14	14
Iyar	12 – 720	12 – 720
Sivan	11 – 360	11 – 360
Tamuz	10	10
Av	8 – 720	8 – 720
Elul	7 – 360	7 – 360

Table 3: Maximum span of time between the mean conjunction and the following true conjunction. The table is constructed on the assumption of a maximum delay of 6 h in Tishri and 14 h in Nisan. We assumed a linear repartition of the delay. Today the Molad occurs about two hours after the mean conjunction but at the beginning of the Jewish calendar the Molad coincided with the mean conjunction.

3. Conclusions drawn from the two tables.

1. Ordinary years.

Theoretically there is a possibility to have a true conjunction falling on the day following the yom ha-keviyah of the months Nisan, Iyar and Av in the following cases:

- In the years of the type $\lambda \pi \beth$ if the Molad of Tishri is between 1 – 5 – 442 and 1 – 9 – 203.
- In the years of the type $\eta \beth \lambda$ if the molad of Tishri is between 3 – 5 – 442 and 3 – 9 – 203.
- In the years of the type $\tau \beth \eta$ if the molad of Tishri is between 5 – 5 – 442 and 5 – 9 – 203.
- In the years of the type $\varkappa \pi \tau$ if the molad of Tishri is between 6 – 5 – 442 and 6 – 9 – 203.

In all these cases the breadth of the window allowing this situation diminishes from Nisan to Av.

2. Leap years.

Theoretically there is a possibility to have a true conjunction falling on the day following the yom ha-keviyah in the following cases:

- In the years of the type $\eta \pi \beth$ if the Molad of Tishri is between 1 – 10 – 543 and

1 – 20 – 490. The possibility concerns the months of Kislev, Shevat, Nisan, Sivan and Av. The window is the broadest in Shevat.

- In the years of the type $\aleph \beth \aleph$ if the Molad of Tishri is between 3 – 10 – 543 and 13– 17 – 1079. The possibility concerns the months of Kislev, Shevat and Nisan. The window is the broadest in Shevat.
- In the years of the type $\aleph \aleph \aleph$ if the Molad of Tishri is between 4 – 9 – 543 and 4 – 11 – 694. The possibility concerns the months of Shevat.
- In the years of the type $\aleph \aleph \beth$ if the Molad of Tishri is between 6 – 10 – 543 and 6 – 20 – 490. The possibility concerns the months of Shevat, Nisan, Sivan and Av. The window is the broadest in Shevat.

4. Heuristic examination of the years according to the areas of Molad defined above, with the program of Tsikuni.

I did not find a case of a true conjunction falling on the day following the yom ha-keviyah among the ordinary years during the period 4111 – 6000.

In the case of leap years I found the following cases, only in the month of Shevat:

- In the years of the type $\aleph \aleph \beth$.
In the years: 4636, 4910, 5130, 5157, 5228, 5404, 5475, 5573, 5662, 5749, 5820 and 5847.
- In the years of the type $\beth \beth \aleph$.
In the years: 4229, 4476, 4574, 4750, 4821, 4997, 5166, 5244, 5413 and 5589.
- In the years of the type $\aleph \aleph \beth$.
In the years: 5290 and 5635.

Only a systematic computer screening could give a definitive and certain result.

It appears that the rule of Hanover has about 24 exceptions in the 1900 first years of the Jewish calendar corresponding to 23500 months. It is thus verified in about 999 cases on 1000 and it presents an exception in 1 case on 1000. It is however surprising that Hanover could not foresee the theoretical possibility of exceptions and concluded on the basis of a 100 years' examination when in the case of the possibility of a moon's sighting before the yom ha-keviyah he was more perseverant and considered and found the possibility of one exceptional case in 500 years.

Anyhow the justification given by Hanover, at different occasions in his writings, of the postponement rules, through different examples, proving that their aim is to prevent absolutely the possibility that the true conjunction could occur on the day following the yom ha-keviyah, must be reconsidered. Although this is generally the case, it cannot be presented as an absolute rule.

The present manuscript has the numbering Ox Mich 58.

Ox Mich 345 (old n°)

Ox 2290 (Catalogue of Neubauer).

והא לך כללי סוד העיבור

א. דע בזמן שאין שם סנהדרין בא"י או סמוכים, אין רשות לקבוע החדשים והמועדות על פי הראייה.¹¹ וראוי להיות יום הקביעה מכל החדשים או ביום קיבוץ האמיתי או ביום אחר קיבוץ אמיתי, אבל לא קודם לו.¹² כמו¹³ בעיבור השנה צריך להיות פסח או ביום תקופת ניסן האמיתי או לאחריו אבל לו קודם יום תקופה אמיתי.¹⁴

ב. המולדות שלנו הם מולדות אמצעיים ומיוסדים על ירושלים תוב"ב, עיין ראב"ע בפרשת אמור.¹⁵

ג. המולד או קיבוץ אמיתי יהיה פעם ברגע מולד אמצעי או קודם לאמצעי או לאחריו. ובתשרי אפשר שהקיבוץ אמיתי מוקדם לאמצעי קרוב ל-י"ד שעות ומאוחר בשש שעות ובניסן אפשר שהקיבוץ אמיתי מוקדם לאמצעי בשש שעות ומאוחר ב-י"ד שעות בקירוב. ואי אפשר שיקדים או שיאחר קיבוץ אמיתי לאמצעי בשני חדשים האלו יתר מכן.

ד. מן הדין שיהיו כל החדשים בכל השנה כסדרן, אחד מלא ואחד חסר בעבור ששנת הלבנה דהיינו י"ב פעם כ"ט י"ב. תשצ"ג עולים שנ"ד יום ה' שעות תתע"ו חלקים. ועולה לחדש אחד שלשים יום וחדש אחד כ"ט יום, ששה חדשים מלאים וששה חסרים. ויהיו לפי זה ראש כל חדש ביום מולד אמצעי. אבל בעבור שהקיבוץ אמיתי פעם מאוחר למולד אמצעי ביום שלאחריו, ואין רשות לקבוע ר"ח ביום קודם לקיבוץ אמיתי, צריכין אנו לדחות לפעמים איזה ר"ח ליום שלאחריו.

¹¹ See H.K.H. 5 : 2.

¹² This is, according to Hanover, the fundamental principle governing the Jewish calendar. See a detailed examination of this problem in the introduction.

¹³ We must remember the proverb « comparisons are odious ». In fact there is no connection between the two problems. Hanover's principle must be compared and opposed to Maimonides understanding of the intercalation rules in H.K.H. 7: 7 and 7: 8.

¹⁴ In his book Tekhumat ha-Shamayim ha-Arokh p. 60. Hanover explained that the intercalation rule works with the mean spring equinox and not with the true spring equinox. He explained in fact that the tekufah of Adda, which is a mean equinox, must occur before the end of 16 days counted from the *Molad Nisan*. If we consider that the Tekufah of Adda is the correct mean equinox (we neglect the shift of the Jewish calendar toward the summer) then we can conclude that the true spring equinox, which precedes the mean equinox by two days, must occur before the end of 14 days counted from the *Molad Nisan*. Practically the Tekufah of Adda can fall on Nissan 16 and therefore the true spring equinox can fall on Nissan 14. Or in other words, the first day of Pessah, Nissan 15, must fall on the day of the Tekufah or after it but not before it.

¹⁵ See Ibn Ezra on Lev. 23: 3:העיבור בנוי על מהלך התיכון.

ה. וכדי שיחול בו דינו כלל שלא לטעות ולא יעשה קביעות ר"ח מאיזה חדשים קודם ליום קיבוץ אמיתי,¹⁶ צריכין אנו לדחות איזה קביעות ר"ה כדי שיבואו כל החדשים בשנה שלפניו ביום הראייה, דהיינו או ביום קיבוץ אמיתי או לאחריו.¹⁷

ו. ומשום זה צריכין אנו לדחות כל ר"ה, דהיינו קביעות ר"ח תשרי מיום הולדו, אם יבא מולד אמצעי י"ח שעות על היום כי אז אפשר שהקיבוץ האמיתי מאוחר בשש שעות ויבא ביום שלאחריו. בעבור זה אנו דוחים כל י"ח בתשרי.

ז. וכן צריכין אנו למלאות חודש תשרי בשנה כסדרן בעבור חשון שאחריו. כגון בשנת 4120 היה מולד תשרי 29 - 8 - 5 ומולד חשון 822 - 20 - 6. והיה קיבוץ אמיתי בחשון שש שעות אחר המולד, ביום ז' שאחריו. ואם נעשה תשרי חסר, יבא ר"ח חשון ביום ו' קודם לקיבוץ אמיתי ביום, וזה אי אפשר. לפיכך ממלאין תשרי כדי שיבא ר"ח חשון ביום ז'. וכן צריכין למלאות חודש כסליו בשנה כסדרן בעבור טבת שאחריו כגון בשנת 4182 היה מולד טבת 439 - 21 - 7 וקיבוץ אמיתי מאוחר בשמונה שעות, דהיינו ביום א' ואם לא ממלאין כסליו יבא ר"ח טבת ביום ז' יום קודם קיבוץ אמיתי וזה אי אפשר. וכן בשבט צריכין למלאות בעבור אדר כגון בשנה הנזכר היה מולד אדר 945 - 22 - 3 וקיבוץ אמיתי מאוחר בשלש שעות. וכן צריכין למלאות ניסן בשנה כסדרן בעבור אייר שאחריו כגון בשנת 4124 היה מולד אייר 950 - 13 - 1 וקיבוץ אמיתי מאוחר י"ב שעות. וכן סיון צריכין למלאות בעבור תמוז כגון בשנת 4135 היה מולד תמוז 224 - 19 - 2 וקיבוץ אמיתי מאוחר ששה שעות. וכן חדש אב צריכין למלאות בעבור אלול כגון בשנה הנזכר היה מולד אלול 730 - 20 - 5 וקיבוץ אמיתי מאוחר שש שעות, וכן מצאנו שנים רבות. וכן צריכין למלאות אדר ראשון בשנת העיבור והוא כסדרן בעבור אדר שני כגון בשנת 4131 היה מולד אדר שני 315 - 16 - 5 וקיבוץ אמיתי היה מאוחר י"ג שעות. ויצא לנו כלל אחד ששנת כסדרן יהיו תשרי, כסליו, טבת, שבט, אדר ראשון בשנת העיבור, ניסן, סיון, אב לעולם מלא ושאר חדשים חסרים.

ח. מצינו לפעמים רבות יהיה המולד תשרי באחד מימי אד"ו, אפילו קודם ח"י שעות צריכין לדחות ליום שלאחריו כדי שיבאו כל החדשים בשנה שלפניו ביום קיבוץ אמיתי או לאחריו. כגון בשנת 4122 היה מולד תשרי 414 - 14 - 1 ואם קובעין בו ביום א' יהיה השנה שלפניה כסדרן ויבא ר"ח כסליו ביום ה' וקיבוץ אמיתי היה היום ו'. וכן יבא ר"ח שבט ביום א' וקיבוץ אמיתי היה ביום ב'. משום זה צריכין לדחות ר"ה משנת 4122 מיום המולד אל שלאחריו ליום ב'. וכן בשנת 4142 היה מולד תשרי 805 - 15 - 1 ואם קובעין ביום א' יבא ר"ח ניסן שלפניו ביום ו' וקיבוץ אמיתי היה ביום ז'. וכן בשנת 4108 היה מולד תשרי 191 - 12 - 4 ואם נקבע ר"ה ביום ד' יהיה השנה שלפניה כסדרן ויבא ר"ח כסליו ביום ד' וקיבוץ אמיתי יהיה ה' וכן שנים רבות.

¹⁶ According to Hanover's fundamental rule. Hanover does not explain how he reckons the true conjunctions, whether he uses the methods of Luhot ha-Ibbur I (modern astronomy) or Luhot ha-Ibbur II (Maimonides' assumptions).

¹⁷ The fundamental rule is thus valid for all the year's months and not only for Tishri.

וכן בשנת 4157 היה מולד תשרי 343 – 8 – 6 ואם נקבע ר"ה ביום ו' יהיה השנה שלפניה בסדרן ויבא ר"ח שבט ביום ו' וקיבוץ אמיתי היה ביום ד'. וכן בשנת 4184 היה מולד תשרי 605 – 13 – 6 ואם היינו קובעים ר"ה ביום ו' יהיה השנה שלפניה בסדרן ויבא ר"ח שבט ביום ו' וקיבוץ אמיתי היה ביום ז' וכן שנים רבות. והואיל שמצינו שנים רבות שצריכין לדחות מימי אד"ו צריכין אנו לדחות בכל השנים מימי אד"ו בכדי שלא לטעות.

ט. והנה מפני דחיית כל י"ח ומימי אד"ו יצא לנו כלל שני שאי אפשר שכל השנים יהיו בסדרן אלא שלפעמים יהיה השנה החסרים יתר מהמלאים. כגון שדוחין ר"ה זה מיום הולדו ור"ה הבא קובעין ביום מולדו. ולפעמים יהיו המלאים יתרים כגון שקובעין ר"ה זה ור"ה הבא דוחין. וכן הדין שצריכין לתקן השנה מתחילתה דהיינו אם יהיה השנה חסרים צריכין לחסר תשרי ואם יהיה השנה מלאים צריכין למלאות חשון. אבל בעבור שמצינו בשנת 5404 היה מולד תשרי 862 – 16 – 1 ויהיה ר"ה ביום ב' בעבור דחיית אד"ו ומולד תשרי שאחריו היה ביום 371 – 14 – 7 ונקבע בו ביום ויהיו החסרים יתר מהמלאים ואם יהיו תשרי חסר וחשון חסר יבא ר"ח חשון ביום ג' ור"ח כסליו ביום ד' והיה מולד כסליו 288 – 18 – 4 וקיבוץ אמיתי מאוחר ביום ה'. לכן צריכין אנו לחסר חשון וכסליו כדי שיבאו כל החדשים ביום קיבוץ אמיתי או לאחריו ומשום זה תלינן קביעות השנים ויצא לנו מזה כלל שלישי: אם היה השנה בסדרן בשנה פשוטה, דהיינו ששה חדשים מלאים וששה חדשים חזרים, יהיו בין ר"ה זה לר"ה הבא ארבע ימים ובשנת העיבור וכסדרן, ויהיו שבעה מלאים וששה חסרים בעבור שחדש העיבור והוא אדר, לעולם מלא כמו שכתבתי בכלל ז', יהיו בין ר"ה זה לר"ה הבא, ששה ימים. ואם היה השנה חסרים יהיו בין ר"ה זה להבא בפשוטה: שלשה ימים ובמעוברת חמשה ימים, דהיינו בפשוטה ז' מלאים ו-ה' חדשים חסרים ובמעוברת ז' חסרים וששה מלאים בגין חדש העיבור והוא אדר צריך להיות מלא לעולם כמו שאמרנו. ואם היה השנה שלמים בפשוטה יהיו ז' חדשים מלאים ו-ה' חסרים ובין ר"ה זה להבא שבעה ימים. ואי אפשר למלאות יתר על שמונה חדשים במעוברת ויתר משבעה בפשוטה, וכן אי אפשר לחסר פחות מחמשה בין בפשוטה ובין במעוברת בעבור שאי אפשר לחסר חודש אחר אלא כסליו כמו שאמרנו בכלל ז'.

י. ולפי זה מצינו עוד שני דחיות: הראשון אם היה בשנת פשוטה מולד תשרי 204 – 9 – 3 או יתר בשעות וחלקים, דוחין אותו עד יום ה' משום שיהיה מולד הבא 0 – 18 – 7 ונדחה ליום א' בעבור מולד זקן, ומיום א' ידחה ליום ב' משום אד"ו כי לא פלוג. ואם היינו קובעין ר"ה זה ביום המולד דהיינו ביום ג', יהיה בין ר"ה זה לר"ה הבא ששה ימים בשנת פשוטה וצריכין למלאות שמונה חדשים וזה אי אפשר בשנת פשוטה. משום כך דוחין ר"ה על יום ה' ולא יהיה בין בין ר"ה זה להבא רק ארבע ימים. ודחיית השניה היא 589 – 15 – 2 או יתר בשעות וחלקים לאחר עיבור, דוחין אותו על יום ג' משום שהיה אז מולד תשרי העבר 0 – 18 – 3 וצריכין לדחות אותו משום מולד זקן ומימי אד"ו עד יום ה' ואם היו קובעין ר"ה זה ביום ב', היה בין ר"ה העבר לר"ה הזה רק ארבע ימים וזה אי אפשר כמו שאמרנו. לכן דוחין ר"ה על יום ג' ויהיה בין ר"ה העבר לר"ה זה חמשה ימים. ולפי חשבון האמיתי צריכין לדחות משום שלא לקבוע ר"ח קודם יום קיבוץ האמיתי כגון בשנת 4179 היה מולד תשרי 39 – 16 – 2 ובשנה שלפניה היה מולד תשרי 530 – 18 – 3 והיה שנה שלפניה שנת העיבור והיו צריכין לדחות שנה שלפניה משום מולד זקן על יום ד' ומיום ד' על יום ה' משום אד"ו ואם היינו קובעין זה ר"ה משנת 4179 ביום הולדו והיא יום ב' לא היה בין ר"ה זה לזה רק ארבע ימים וזה אי אפשר בשנת העיבור. ואם תאמר למה דחו ר"ה העבר על יום ה', ביום ד' היה לו לקבוע ומאי אמרת הלא ביום ד' בלי זה דוחין, זה אינו דווקא אם חל בו ביום דוחין אבל מדחייה לדחייה לא, הגא בעצמך האמת אתך וקוש[י]תך עצומה ולית נגר ובר נגר דיפרוקינך, אם לא משום הטעם שאמרנו פה שצריך להיות אותה דחייה מדחייה משום קיבוץ אמיתי. כגון בזה המשל אם היינו קובעין כקוש[י]תך ביום ד' לר"ה ושנה זו ביום הולדו יום ב', יהיה השנה חסרה ויבא ר"ח סיון ביום א' וקיבוץ אמיתי

באותו חודש יהיה ביום ב' וזה כבר ידעת שא"א שלא לדחות וק"ל וכן בשנים רבות. ולפי זה יצא לנו כלל סדר קביעות השנים על ארבע דרכים:

- א. אם יבא מולד תשרי באחד מימי אד"ו דוחין אותו ליום שלאחריו.
- ב. אם יהיה מולד תשרי באחד מימי ב ה ג ז ב-ה"י או יתר דוחין אותו ליום שלאחריו ואם יהיה יום שלאחריו אחד מימי א ד ו דוחין אותו לשל אחר אחריו.
- ג. אם יהיה מולד תשרי ג. ט. ר"ד או יתר בשעות וחלקים בשנת פשוטה, דוחין אותו על יום ה' לשל אחר אחריו.
- ד. אם יהיה מולד תשרי ב. ט"ו. תקפ"ט או יתר בשעות וחלקים בשנה אחר שנת העיבור, דוחין אותו ליום ג' שאחריו.

י"א. וראיה לזה כגון בשנת 4132 היה מולד ניסן 904 – 13 – 4 ונדחה לחמישי משום דחיית ר"ה שאחריו בעבור שקיבוץ אמיתי מניסן מאוחר י"ד שעות ואין הקביעות רודף אחר מולד אמצעי ולא אחר יום הראייה¹⁸ כי בזה המשל יהיה יום הראייה פעמים רבות ביום ז' שאחריו ואין הלבנה נראית לא בליל חמישי ולא בליל ששי כמו שכתב הרמב"ם ז"ל פרק ז'¹⁹. וכן בשנת 4137 היה מולד תשרי 239 – 18 – 4 ונדחה לחמישי בעבור שלא היה קיבוץ אמיתי אלא בחמישי וכן בשנת 4147 היה מולד שבט 223 – 16 – 4 ונדחה לחמישי מטעם הנ"ל. וכן בשנת בניסן ובשנת בתשרי ובשנת בשבט ובשנת בסיון ובשנת בשבט ובשנת בניסן ופעמים רבות תמצא שהמולד מאיזה חודש נדחה ליום שאחריו מטעם שקיבוץ אמיתי הוא ביום שאחריו ויום הראייה הוא בשלישי למולד: עיין בפירוש הראב"ע ב"פ אמור ושם תמצא המשל כמו שכתב הרמב"ם.²⁰

י"ב.

הראייה אשר הייתה תמיד בירושלים תוב"ב יוכל לראות הלבנה בתשרי אם היה בין רגע קיבוץ אמיתי ובין עת הראייה אחריו (שהיא תמיד בשליש שעה אחר שקיעת השמש) עשרים שעות ושליש ופחות מזה אי אפשר לראות. ואפשר להתאחר הראייה בירושלים עד ס"ה שעות אחר קיבוץ אמיתי. ובניסן צריכין לכל הפחות ק"ב שעות ולכל היותר ל"ב שעות אחר קיבוץ אמיתי. ובתמוז לכל הפחות י"ח שעות ושליש והקץ היותר קצר שיראה בה הירח ברוחב ל"ה יהיה בתנאי שהאורך הראשון ט' מעלות ו-ה' חלקים²¹ ובסוף תאומים ואז אפשר שיראה הירח עם י"ח שעות ושליש אחר קיבוץ האמיתי ושם יהיה מרחק הכפול קרוב לחמש מעלות²² דהיינו בזמן העבר שהיה גובה השמש בטלה²³ ויהיה בסרטן מנת השמש ב' מעלות בקירוב לגרוע.

¹⁸ The formulation is clearly borrowed from R' Abraham Ibn Ezra commentary on the Torah, Leviticus 23, 3 :

ואין הקביעות רודף אחר ראית הלבנה.....גם אין הקביעות בנוי עת התחברות המאורות, אפילו במהלך האמצעי.....

¹⁹ H.K.H. 7: 8.

²⁰ Ibn Ezra on Lev 23. 3.

גם פעמים היה הקביעות בתשרי יום חמישי ולא נראית הלבנה בליל שבת והיה האויר זך.

²¹ According to Rambam: $> 9^\circ$. I don't know the origin of the number $9^\circ 5'$. At the end of Sefer Tekhunat ha-Shamyim ha-Arokh Hanover calculated different situations of visibility or invisibility of the new moon all through the year. In table 11 p. 125 he found in Gemini a case of visibility for $\lambda_1 = 9^\circ 1'$ at the latitude of 35° . This coincides very well with the computer calculations at the end of my book Hilkhut Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam. Thus at the end of Gemini we have already visibility of the new moon at the latitude of 35° for $\lambda_1 = 9^\circ 1'$ and at the latitude of 32° for $\lambda_1 = 9^\circ 20'$.

²² Because of the eccentricity of the orbits of sun and moon the sun may be $1^\circ 59'$ on either side of its mean place and the moon 5.4° , at new moon. In ancient astronomy this latter number was considered to be 5° (see below the model of sun and moon). Therefore when the first elongation is $9^\circ 5'$ at the moment of the first visibility the distance between mean sun and mean moon can be only $9^\circ 5' - 1^\circ 59' - 5^\circ = 2^\circ 6'$ corresponding to a double elongation of $2\eta = 4^\circ 12'$ at a latitude of 35° . At a latitude of 32° we have the minimum value of $2\eta = 4^\circ 12' + 19' = 4^\circ 31' \sim 5^\circ$. At Maimonides' epoch the longitude of the solar apogee was $86^\circ 45'$; thus at the end of Gemini, in the area of the optimal condition for an early visibility of

ואז אפשר שיראה הירח אם היה מרחק הכפול קרוב לחמש מעלות. אבל בשאר מזלות או באמצע א"י או בזמננו זה שהגובה השמש בסרטן אי אפשר שיהיה מרחק הכפול קרוב לחמש מעלות ויראה בה הירח. והקץ הארוך שיראה בלי ספק הירח בירושלים יהיה בתנאי שאורך הראשון היה כ"ב מעלות וחצי ובתשרי ובזמננו זה, אעפ"כ אפשר שלא יראה הירח ברוחב ל"ה. אבל אם היה האורך הראשון יתר מן כ"ד מעלות יראה הירח בכל ארץ ישראל אפילו ברוחב ל"ה.²⁴

י"ג. כתב הרמב"ם: פעמים יהיה יום הראייה אחר יום הקביעה, פרושו כגון שהיה מולד אמצעי בתשרי

בליל ב' או בתחילת יום ב' וקיבוץ אמיתי מוקדם קרוב ל-י"ד שעות אזי יהיה יום הקביעה ביום ב' ויום הראייה אפשר ביום ג'. וכן אם היה מולד האמצעי בתחילת ליל ב' וקיבוץ אמיתי מאוחר איזה שעות עד שיהיו בין רגע קיבוץ אמיתי ובין ליל ג' עשרים שעות ושליש או יתר שאז אפשר שיראה הירח בליל ג' ויהיה יום הקביעה ביום ב' ויום הראייה ביום ג'. גם אפשר שיתרחק יום הראייה מיום הקביעה עד יום שלישי למולד. כגון שהיה מולד אמצעי בתשרי ביום ב' מעט קודם חצות היום וקובעין בו ביום ב' וקיבוץ האמיתי מאוחר בשש שעות ורוחב הירח ברוחב כל חמש מעלות ויתאחר הראייה עד מ"ה שעות אחר קיבוץ אמיתי ואז א"א שיראה הירח בליל ג' ולא בליל ד' אלא יראה בליל ה' ויהיה יום הראייה ביום ה'.

ולפעמים יהיה יום הראייה ביום הקביעה כגון שהיה מולד אמצעי בתשרי ב. ט"ו. תקפ"ט והוא מוצאי עיבור וקיבוץ אמיתי היה מוקדם לאמצעי קרוב ל-י"ד שעות ויהיה בין רגע קיבוץ אמיתי ובין עת הראייה בתחילת ליל ג' יתר מעשרים שעות ושליש ואפשר שיראה הירח ביום ג' ויהיה יום הראייה ב-ג' וגם הקביעה ביום ג' בעבור הדחייה כמו שאמרנו בפרוטרוט כלל יוד ודחייה השנית ע"ש.

וכן אם המולד אמצעי ג. ט. ר"ד בשנה פשוטה ונדחה לחמישי לקבוע בו כמו שבארנו בתחילת כלל יוד ע"ש ובאותו פעם היה קיבוץ אמיתי אחר מולד אמצעי שאז הוא מהנמנע לראות הירח בליל ד' מטעמים שכתבנו עד הנה, ואפשר שיראה בליל ה' ואז יהיה יום הראייה גם ביום ה' כמו הקביעה. בשני משלים האלו אפשר בכל החדשים בין שקיבוץ אמיתי מוקדם או מאוחר למולד אמצעי. לפעמים יהיה יום הראייה קודם ליום הקביעה יום אחד כגון אם היה המולד בתשרי ג. ט. ר"ד בשנת פשוטה ונדחה ליום ה'. והיה קיבוץ אמיתי מוקדם לאמצעי קרוב ל-י"ד שעות ואז אפשר שיראה הירח בליל ד'. ויהיה יום הראייה ביום ד' וביום ה' יהיה הקביעה מפני דחיית כמו שאמרנו. וכן אפשר בחדשים הקודמים בזה המשל שיהיה יום הראייה קודם ליום הקביעה כמו שכתב הרב הראב"ע אמור אבל בדרך אחר אי אפשר שיום הראייה יהיה קודם ליום הקביעה יום אחד והוא פלא²⁵ כי צריך להיות מולד אמצעי בתשרי ב- ג ט ר"ד וצריך להיות שנה פשוטה וגם צריך להיות הקיבוץ מוקדם לאמצעי כדי שיהיה ריוח בין רגע קיבוץ עד עת הראייה יתר מן כ"ד שעות וצריך שיהיה רוחב הירח צפוני חמש מעלות ודבר זה שיהיו כל התנאים הממהרים הראייה ביחד הוא פלא גדול ואפשר שלא המצא תמצא בחמש מאות שנים וכבר יגעת א"ע ומצאתי תאמין²⁶ שחקרתי וחפשתי בחיפוש אחר חיפוש משנת 4000 עד שנת 5000 ליצירה ולא מצאתי רק במשל אחד²⁷ בשנת 4683 שהיה מולד אמצעי בתשרי ג. ט. תמ"א ונדחה לחמישי ונראה הירח בליל ד' והיה יום הראייה ביום ד' יום אחד מוקדם ליום הקביעה.

the moon. That means that the anomaly of the sun and the quota of the anomaly were near to zero. The minimum elongation was then $9^{\circ} 5' - 5^{\circ} = 4^{\circ} 5'$ and $2\eta = 8^{\circ} 10'$. Hanover explains that the minimum value of $2\eta \sim 5^{\circ}$ could only have been reached in a remote past, when the solar apogee was in the beginning of Aries.

²³ When in the remote past the solar apogee was in the sign of Aries near to 0° and the quota of the anomaly was maximum in Cancer near to 90° and subtractive.

²⁴ Here Hanover reproduced exactly Maimonides' condition.

²⁵ It is an exceptional situation.

²⁶ B. Megilah 6b.

²⁷ This corresponds to Tishri 922. This exceptional case is known in the Jewish literature surrounding the dispute between Sa'adia Gaon and Ben Meir. The discovery of this exceptional case by Hanover through manual calculations is amazing. Later Hanover found a second case as he noted at the end of his Tekhunut ha-Shamayim ha-Arokh p. 137 that a similar phenomenon happened in Tishri 5275.

ובמדינותנו שהן למערב א"י, פירוש: במדינותנו שהן למערב א"י יהיה עת הראייה מאוחר לעת הראייה שבא"י ואז אפשר אם היה המולד ג. י"ח או ה. י"ח או ז. י"ח לראות הירח במדינותנו בליל ד' והקביעה יהיה ביום ה' כי בהקביעה הן שווין ולפ"ז במדינות ההן אין הפלא כל כך גדול כמו שהוא בא"י.²⁸ אע"פ שהראייה בחו"ל אינה מועלת כ"א בא"י והוא לא כתב זה אלא לדמיונו.

י"ד. דחיית כל י"ח כמו שאמרנו בכלל ח' ולא כמו שכתבו בעלי המעברים²⁹ והמפרשים שטעם דחיית י"ח משום דאמרינן בגמרא בר"ה דף כ' עמ' ב' נולד קודם חצות וזה מוכח ממאמר הזה עצמו דאמר שם נולד קודם חצות בידוע שנראה סמוך לשקיעת החמה (עיין בסוף לוחות העיבור שם כתבתי פירוש לכלל זה בשם ה[?].)³⁰ וא"כ יהיה יום הראייה למחר. ואנו קבלנו אם נולד קודם חצות קובעין בו ביום. אלא הטעם כדי לפגוע ביום קיבוץ אמיתי ובעבור שאפשר שקיבוץ אמיתי מאוחר לאמצעי רק בשש שעות ולא יותר לפיכך דוחין ר"ה על למחרתו אבל אם נולד קודם חצות בוודאי יהיה קיבוץ אמיתי בו ביום וקובעין בו ביום.

ט"ו.

0° 59' 8" 19''' 48''''	מהלך השמש לדעת הרמב"ם זצ"ל
0° 0' 0" 9''' 0''''	מהלך גובה השמש ביום אחד
13° 10' 35" 1''' 48''''	מהלך אמצע מסלול ביום אחד
0° 3' 10" 37''' 48''''	מהלך הראש אחורנית

29 – 12 – 793
354 – 8 – 876
365 – 5 – 879
91 – 7 – 490
30 – 10 – 523
27 – 7 – 775

חודש הירח יהיה לפי זה
שנת הירח ופשוטה³¹
שנת השמש האמצעי³²
תקופת השמש האמצעי
חודש השמש האמצעי
תקופת הירח שמסבב כל גלגלו

²⁸ West to Israel the age of the new moon increases and therefore the sighting is less exceptional.

²⁹ They understand that when the Molad is before noon there is a possibility to see the new moon on the same evening on the assumption that the true conjunction preceded the molad by 14 hours and that the new moon was seen 20 h 1/3 after the true conjunction. But Hanover rejects this idea and he writes that the fixing of the Neomenia does not follow the moon sighting. He explains that the true conjunction can follow the mean conjunction by 6 hours. When the Molad (which coincided at the beginning with the mean conjunction) is after noon there is a possibility that the true conjunction will follow the molad with a delay of 6 hours and it will belong to the next day. This is in contradiction with the fundamental rule of the calendar and it explains the postponement of molad Zaken.

³⁰ There is nothing of this in our printed version of Luhot ha-Ibbur. Maybe that he makes allusion to the third part of Luhot ha-Ibbur.

³¹ 12 * (29 – 12 – 793)

³² 365d 5h 48m 50s an excellent value for the tropical year.

העיקור אשר ממנו התחלנו החשבון שלנו הוא מתחילת ליל ב' דהיינו שליש שעה אחר שקיעת החמה שיומו ב' לחודש ניסן משנת חמשת אלפים וארבע מאות ותשעים³³ ליצירה ומיוסד על ירושלים תוב"ב.

356° 53' 15''	והיה אז מקום השמש האמצעי
97° 56' 48''	מקום גובה השמש
4° 29' 26''	מקום ירח האמצעי
278° 6' 56''	אמצע המסלול
57° 45' 2''	מקום אמצע הראש

והימים אשר עברו מרגע העיקר שעשינו עד תחילת לילה שיומו:³⁴

175d 23h40 m	א' לחודש תשרי משנת תצ"א לפר"ט קטן
384	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ב
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ג
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ד
383	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ה
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ו
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ז
385	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ח
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תצ"ט
383	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"א
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ב
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ג
383	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ד
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ה
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ו
385	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ז
353	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ח
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ט
384	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"י
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"יא
383	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ב
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ג
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ד
385	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ה
353	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ו
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ז
385	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ח
355	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"ט
383	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"י
354	ועד תחילת לילה שיומו א' לחודש תשרי משנת תק"יא

³³ This is the epoch that Hanover had adopted in his first books, it corresponds to Tishri 1729.

³⁴ The difficulty of this system is that we must know the number of days which elapsed since the epoch for any astronomical calculation. This makes necessary to examine the number of days of all the elapsed years. This explains the superiority of the solution chosen later by Hanover to adopt an epoch at the astronomical mean conjunction corresponding to the Molad of Beharad. It does not require these long calculations. But we must calculate the astronomical mean conjunction corresponding to the molad neighboring the moment under examination.

שני המחזור הם י"ט: שנים עשר פשוטות ושבעה שנים מעוברות.
 וחדשים מן י"ב פשוטות עולים 144 חדשי הלבנה
 וחדשים מן ז' שנים מעוברות עולים 91
 ויהיו חדשי המחזור 235 חלק ש ימים
 העולים יחד על סך 6939 16 595
 וימי י"ט שני החמה לדעת שמואל 6939 18
 נשאר 1 485
 ורבי אדא לקח י"ט שני הלבנה וחלק על י"ט
 שני החמה 365 5 997 48
 ויצא לו שנת החמה דהיינו שס"ה ימים ה' שעות
 תתקצ"ז חלקי תתר"ף ועוד מ"ח רגעים ש-ע"ו מהם
 עולים לחלק אחד ולא נשאר כלום בכל מחזור ולפי
 חשבוננו אם תגרע שנת הלבנה מן שנת החמה נשאר י' ימים ק"א שעות קך"א חלקים
 מ"ח רגעים וקח י"ט פעמים שארית השנה ויוצא 206 17 151
 והימים האלה מכוון ל-ז' חדשי הלבנה שכל אחד 29 12 793

ט"ז.

The movement of the sun.

In Fig 1, H is the position of the sun on its orbit, H₁ is the apparent position of the sun as seen from the earth and H₂ is its mean position of the sun as seen from the center of the eccentric. P is the perigee and K is the apogee. Angle <KEH> is the true anomaly; angle <KCH> is the mean anomaly α and angle <EHC> is the quota of the anomaly β . The true anomaly is the angle <KEH> = <KCH> - <EHC> = $\alpha - \beta$. If we add the longitude of the apogee to both members of the relation, we get then $L^\circ = l^\circ - \beta$, where L° is the true longitude of the sun and l° is the mean longitude of the sun.

If EC=b, CH=a, and EH=c then $e^\circ = b/a$. We have further $c \sin \beta = b \sin \alpha$

$$c \cos \beta = a + b \cos \alpha$$

Dividing these relations member by member: $\tan \beta = \frac{e^\circ \sin \alpha}{1 + e^\circ \cos \alpha}$ (1)

Where $e^\circ = 0.0347$ is the eccentricity of the sun's orbit.

For example if $\alpha = 70^\circ$ we find $\beta = 1^\circ 50' 45''$. Hanover writes $\beta = 1^\circ 51'$.

The anomaly is maximum when $\sin \alpha = -e^\circ$ i.e. when $\alpha = 91.9886^\circ$, β is then $1^\circ; 59' 19''$.

The true position of the sun varies thus around its mean position by an angle β which is always less than two degrees. This angle β was called quota of the anomaly and it corresponds to our modern equation of the center. $L^\circ = l^\circ - \beta^\circ$ (2)

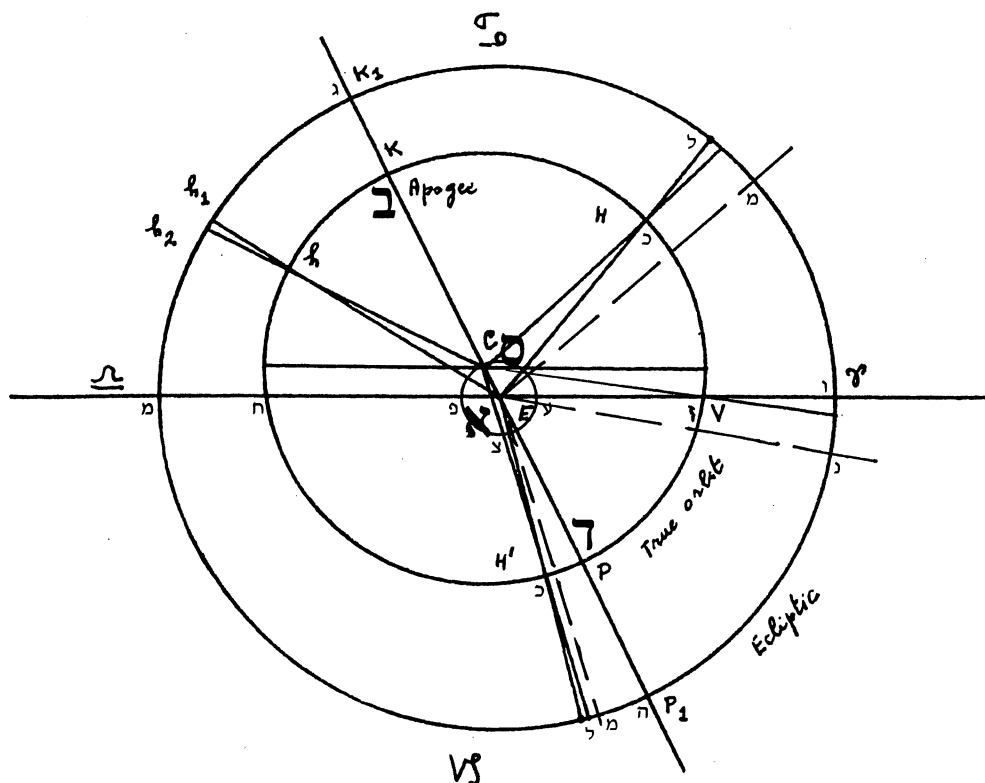


Figure 1: The solar model of the ancients. E or ס is the center of the earth and of the ecliptic and C or ס is the center of the true orbit. The sun turns in the anticlockwise direction. γ is the vernal point, the apogee corresponds to the beginning of July. The true positions are seen from the earth and the mean positions are seen from the center of the eccentric.

א. מרכז הארץ ועליו עובר גלגל המזלות וסימנו ו נ ה מ ג וסדר המזלות שמקיפין ממערב למזרח³⁵, מן טלה עד שור ועד תאומים.

ס. מרכז היוצא ועליו עומד גלגל ז כ ח ב ד הנושא גוף כדור השמש ובגלגל הזה מסבב גוף השמש בשעה אחת ממערב למזרח מן כ אל ת ומן ת אל ב ואל ד בכל נ"ט חלקים ו-ה' שניים י"ט שלישיים מ"ה רביעיים ונקודת ס מסבב בגלגל קטן וסימנו ע ס פ צ גם ממערב למזרח מן ע אל ס ואל פ ואל צ בתנועה כבידה בכל ע' שנה מעלה אחת בקירוב.

ב. נקודת גובה השמש כאשר עומדת עתה בזמננו זה במעלה ח' במזל סרטן.³⁶

ד. נקודת שפל השמש עומדת עתה בזמננו זה ב-ח' מעלות בגדי.³⁷

ואם היה השמש בנקודת הגובה ב והשמש עומדת במרחק הרחוק מן הארץ ובנקודת השפל ד עומדת השמש במרחק הקרוב אל הארץ ובשאר כל נקודות הגלגל עומדת השמש יותר קרוב אל הארץ מאשר היא בגובה ויותר רחוק מאשר היא בנקודת השפל.

³⁵ Direct direction or counterclockwise.

³⁶ 98°

³⁷ 278°

קו **אג אל אה או** נקרא **קו אמיתי** המורה מקום השמש האמיתי בגלגל המזלות דהיינו כאשר תמשוך קו מן מרכז הארץ העובר על גוף השמש בנקודת **ב** או **כ** או **ד** או **ז** יגיע הקו הזה אל המזלות לנקודת **ג** או **ל** או **ה** או ו זהו מקום השמש האמיתי במזלות. וקו **סב סכ סד סז** היוצא ממרכז היוצא או מרכז גלגל הנושא עד גוף השמש נקרא **קו המניע** וקו **אמ אנ** היוצא מן מרכז הארץ ומקביל לקו המניע נקרא **קו האמצעי** ומורה מקום השמש האמצעי במזלות. כגון אם היה גוף השמש בגלגלה בנקודת **כ** תהיה קו **אמ** המקביל לקו המניע **סכ** קו האמצעי ויהיה נקודת **מ** בגלגל המזלות מקום השמש האמצעי ונקודת **ל** מקום השמש האמיתי.³⁸ וקשת קטן בגלגל המזלות **למ** או **ונ** הנאחז בין מקום השמש האמצעי **מ** ובין מקום השמש האמיתי **ל** נקרא מנת השמש ומנת זה תגרע מן מקום שמש האמצעי כאשר השמש הולכת מן הגובה אל השפל דהיינו בחצי גלגלה **בכזד** ותוסיף אל מקום אמצע כשהשמש הולכת מן השפל אל הגובה דהיינו בחצי גלגלה **דכחב** ויוצא בשניהם מקום השמש האמיתי. אבל אם היה השמש בגובה או בשפל עצמה למשל בנקודת **ב** או **ד** אין לה מנת, מקום האמצעי יהיה גם כן מקומה האמיתי. וקשת מגלגל הנושא שהולכת השמש מן הגובה דהיינו קשת **בכ** או **בכח** או **בכז** או **בכד** או נקרא מסלול השמש והינו המרחק בין מקום גובה השמש ובין מקום אמצע השמש ובמסלול הזה נערך המנת. וסדר החשבון כך הוא: תוציא מקום השמש האמצעי ומקום גובה השמש לאותו רגע שתמצא מלוח המהלכים ותגרע מקום הגובה ממקום האמצעי ונשאר מסלול השמש. ועם מסלול הזה תוציא מנת המסלול מלוח המנת, אם הייתה המסלול פחות מן ק"ף מעלות תגרע המנת מן מקום השמש האמצעי ואם היה המסלול יתר מן ק"ף מעלות תוסיף המנת אל מקום השמש האמצעי והיוצא בשניהם יהיה מקום השמש האמיתי לאותו רגע.

י"ח.

ובעבור שבכל חשבונות התכונה צריך אתה לידע העיקור אשר ממנו תהיה ההתחלה לכן עשינו עיקור אשר ממנו תתחיל כמו שכתבתי בכלל ט"ו. ועיקור הזה תיקנתי על שליש שעה אחר שקיעת השמש בארץ ישראל בימי ניסן שהיום והלילה שווין דהיינו שהשמש שוקע בתחילת לילה בשעה ששית אחר חצות היום שלפניו, לכן אם אתה תוסיף המהלכים לימים שלמים על העיקור יצא לך מקום השמש ומקום הגובה לשעה ששית מיום שתמצא אבל [?]. היגע לאו כל יום לעת שקיעת בא"י כי בתקופת תמוז שוקע השמש בא"י שעה אחת אחר שעה ששית ובתקופת טבת שוקע השמש בא"י שעה אחת שעה אחת קודם שעה ששית משום שבא"י היום היותר ארוך יגיע ל-י"ד שעות והיותר קצר יגיע לעשרה שעות. לכן צריך אתה לתקן הקדימה או האיחור לכל זמן דהיינו שצריך אתה להוסיף או לגרוע המהלכים לפי הזמן שהשמש יקדם או יאחר לשקוע.³⁹

י"ט.

אם תמצא לידע תקופת השמש האמיתי דהיינו היום והשעה שתבא השמש לראש המזלות במהלכה האמיתי: טלה, סרטן, מאזנים, גדי, תוציא תחלה תקופה האמצעי דהיינו הרגע שתבא השמש לראש ארבע מזלות האלו במהלכה האמצעי ותוצא מנתה לפי ערך מסלולה, ולפי ערך המנת תוציא הזמן אשר צריך להלך השמש דהיינו כערך "28', 40" שהוא מהלך השמש בשעה, אל שעה אחת כך ערך המנת אל השעות והחלקים. והזמן היוצא תגרע כשהיה המסלול יתר מ-ק"ף מעלות ותוסיף אל המסלול כשהיה [המסלול] פחות מ-ק"ף, אל רגע תקופה האמצעי ויוצא רגע תקופה אמיתי בקרוב. לרגע הזאת תוציא ע"פ מהלך השמש האמצעי

³⁸ It was generally accepted that the mean movement of the sun is considered around the point C or the center of the eccentric while the true or apparent movement was considered around the point E or the earth and center of the ecliptic. Hanover introduces the line **אמ** parallel to CH or **סכ**, allowing to consider point **מ** as the mean position of the sun around E or **א**.

³⁹ When we add the movements of the celestial bodies for complete days of 24h to the radices we find the position of the celestial bodies on the selected day at the same mean time as that of the epoch. This time is not necessarily 20m after sunset and therefore we must bring a correction.

⁴⁰ The mean velocity of the sun is 59' 8" per day. This corresponds to 147.83" per hour or 2' 27.83" per hour.

ומסלולה ומנתה, ומנת זה השני תגרע מן מקום האמצעי אם היה המסלול פחות מן ק"ף ותוסיף אל מקום האמצעי אם היה המסלול יתר מ-ק"ף. ויוצא מקום השמש האמיתי. אם יהיה מקום הזה ראש המזלות הנזכרים יהיה החשבון מכוון ואם לאו צריך תיקון ועל פי רוב יהיה ההפרש מעט.⁴¹

ועל פי תקופה האמצעי היו מעברין ב"ד שבא"י על התקופה דהיינו בעת שמשכה תקופת טבת האמצעי עד שיתסר בניסן עיברו להאי שתא ומזה תמצא השנים הראויות לעבר בשני המחזור. ולתקופה חשבינן השנים

מניסן בשנה ראשונה של מחזור. ולפי ששנות החמה⁴² 365 - 5 - 879
ושנות הלבנה⁴³ 354 - 8 - 876

נשאר 3 - 21 - 10 לכל שנה וזהו סדר העיבור:

ע"ן בראב"ע פ' אמר.⁴⁴ ועל פי חשבון תקופת רב אדא לא נשאר כלום.⁴⁵

שארית עד ניסן משנת ב' למחזור	10 - 21 - 003
	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ג' וצריכין לעבר	21 - 18 - 006 = 1
	10 - 21 - 003
	32 - 15 - 009
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת ג'	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת ד'	3 - 02 - 296
	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ה'	13 - 23 - 299
	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ה' וצריכין לעבר	24 - 20 - 302 = 2
	10 - 21 - 003
	35 - 17 - 305
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת ו'	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת ז'	6 - 04 - 592
	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ח' וצריכין לעבר	17 - 01 - 595 = 3
	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ט'	27 - 22 - 598
	10 - 21 - 003
	38 - 19 - 601
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת ח'	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת י'	9 - 06 - 888

⁴¹ Thus an iterative calculation which converges rapidly until we find that the true longitude of the sun is 0° , 90° , 180° or 270° .

⁴² 365 - 5 - 879 represents 365d 5h 48m 50s. This is a rather good value for the tropical year. However Lalande at the same period gave 365d 5h 48m 45s, slightly less than the modern value of 365d 5h 48m 46s. In a paper on Luhot ha-Ibbur I, to be published in B.D.D, I showed that Hanover's calculations were established on the basis of a tropical year 365d 5h 48m 57s quite greater than the first value of 365 - 5 - 879.

⁴³ $12 * (29 - 12 - 793)$

⁴⁴ I don't understand the connection between Ibn Ezra on Emor and the present table of intercalation.

⁴⁵ When we use the Jewish year of 365d 5h 997 hal 48 reg, then at the end of 19 years we have no remainder. The table can be found in Luhot ha-Ibbur II, table 20 (left column) and is reproduced in the paper mentioned above.

	10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת י"א וצריכין לעבר	20 - 03 - 891 = 4 10 - 21 - 003
	31 - 00 - 894
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת י"א	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת י"ב	1 - 12 - 101 10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת י"ג	12 - 09 - 104 10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת י"ד וצריכין לעבר	23 - 06 - 107 = 5 23 - 06 - 107 = 5 10 - 21 - 003
	34 - 03 - 110
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת י"ד	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת ט"ו	4 - 14 - 397 10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת ט"ז	15 - 11 - 400 10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת י"ז וצריכין לעבר	26 - 08 - 403 = 6 10 - 21 - 003
	37 - 05 - 406
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת י"ז	29 - 12 - 793
שארית עד ניסן משנת י"ח	7 - 16 - 693 10 - 21 - 003
שארית עד ניסן משנת י"ט וצריכין לעבר	18 - 13 - 696 = 7 10 - 21 - 003
תגרע חודש העיבור שהוספנו בשנת י"ט ⁴⁶ .	29 - 12 - 793

ד"א.

The lunar model.

The aim of the lunar model is to calculate the true position of the moon from its mean position.

⁴⁶ The length of the year of Adda is 365d 5h 997 hal 48 reg. The length of the tropical year adopted in the present table is 365d 5h 879 hal. The difference is 118 hal 48 reg. After 19 years this difference amounts to 2254 hal = 2h 94 hal. This is exactly the conclusion of the present table:

18d	13h	696
10	21	3
29	10	699

After subtraction of the 7th additional month we have a difference of $(29 - 12 - 793) - (29 - 10 - 699) = 2h 94 hal$.

The apparent movement of the moon happens, counterclockwise on a great circle inclined on the ecliptic by an angle of about 5° . This inclination is generally neglected except for the study of the moon's latitude. This great circle intersects the great circle of the ecliptic in two points, the ascending node, when the latitude of the moon becomes positive and the descending node when its latitude becomes negative. Both points have a retrograde movement.

We have represented the model of the moon's movement on Fig. 2 and 3. O is the mean moon, M is the true moon. M moves in a retrograde movement, i.e. clockwise, along a little circle of radius r at the velocity of $13^\circ; 03' 53.93''$. Its center O moves counterclockwise (direct movement) on a great circle of radius R and of center C, different from E, the earth. It is called the eccentric or the deferent. The diameter EO, the apse line, joining the earth to the mean moon intersects the epicycle in the points A and T, A being the most removed point from the earth. The point of intersection of the indicator EM with the ecliptic is the true position of the moon. The vector ES represents the direction of the mean sun. The angle $\langle OES \rangle$ between the mean sun and the mean moon is called the elongation η . The cinematic model of the Ancients postulates that $\langle OES \rangle = \langle SEC \rangle$ or that $\langle OEC \rangle = 2\eta$; it is called the double elongation. Point C turns around E clockwise (retrograde movement). Point P is the symmetric of C with regard of E; it is the prosneusis point. PO intersects the epicycle in R. A is the true apogee and R is the mean apogee of the epicycle. The angle $\langle ROM \rangle$ is the moon's mean anomaly.

$\langle AOR \rangle$ is the quota of the double elongation or the prosneusis arc p . The angle $\langle AOR \rangle$ is the moon's true anomaly. The true anomaly is thus the mean anomaly plus, or less, the quota of the double elongation. Finally the angle $\langle OEM \rangle$, which represents the difference between the mean position of the moon O and the true position of the moon m is the quota of the true anomaly. Point K is the apogee of the mean moon's movement on the eccentric and point L is the perigee of the mean moon's movement on its eccentric.

According to Al-Battani, followed by Maimonides,

$$e(= EC = PE = 10^p 19' = 10.3167.$$

The Radius of the ecliptic is fixed arbitrary to $60p$.⁴⁷

$$\text{The radius of the epicycle is } r = 5^p 15' = 5.25.$$

The radius of the eccentric is $R = 60^p - 10p 19' = 49^p 14' = 49.6833$.

The distance from the earth to the apogee of the eccentric is $EK = 60^p$

The distance from the earth to the perigee of the eccentric is $EL = 39^p 22' = 39.3667$.

⁴⁷ 60 plays for the ancients the same role as 100 for us, thus $60p$ has the same meaning as 100%, p means units, it allows distinguishing from degrees. $60p$ represents the reference distance; it is a relative and not an absolute distance.

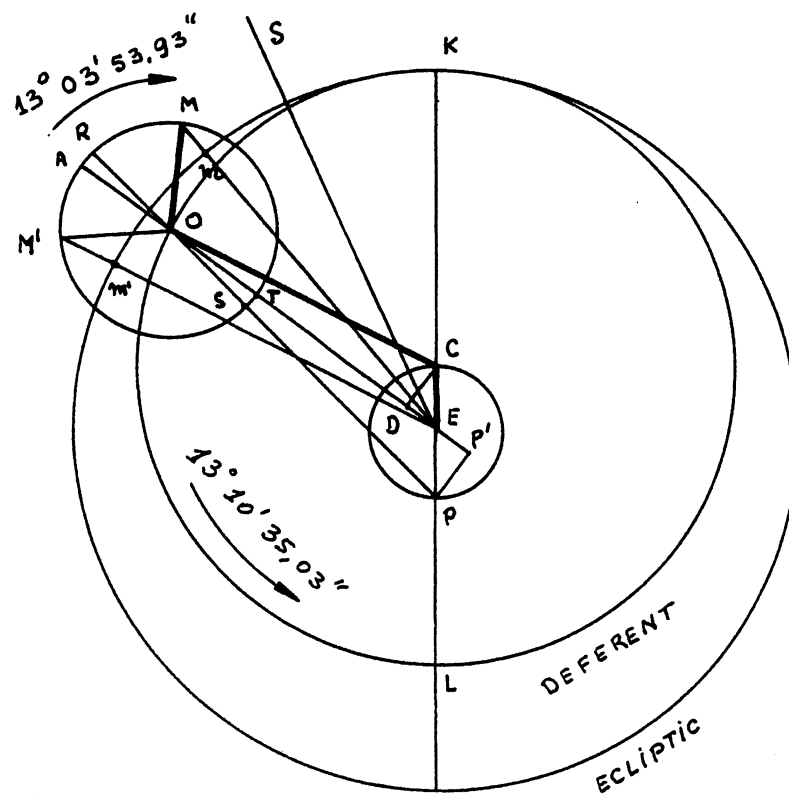


Figure2: The model of the moon's movement of the ancients.

$$\frac{EL}{EK} = \frac{39.3667}{60} = 0.6561$$

$$\frac{r}{R} = \frac{5.25}{49.6833} = 0.1057$$

Determination of the true moon from the mean moon.

The data of the problem are the mean anomaly $\langle ROM \rangle$ and the elongation $\langle OES \rangle$. We want to find the angle $\langle OEM \rangle$, the quota of the true anomaly.

First step: in the triangle OPE, PP' is perpendicular to OE.

$$\tan p = \tan \langle EOP \rangle = \frac{PP'}{P'O} = \frac{PP'}{P'E + EO} = \frac{PE \sin \langle PEO \rangle}{EO - PE \cos \langle PEO \rangle}$$

With $\langle PEO \rangle = 180^\circ - 2\eta$; $PE = EC = e$ (and $EO = \rho$).

This relation is true in all the cases of figure. In fig 2: $\cos (\langle PEO \rangle)$ is negative while in fig 3, it is positive. Therefore

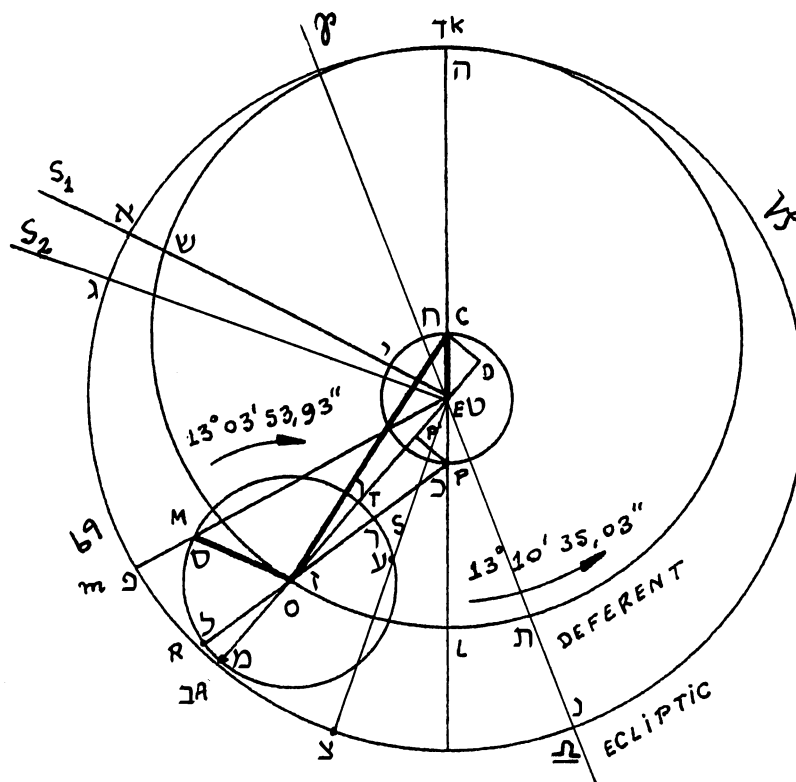


Figure 3. The model of the moon's movement of the ancients.

$$\tan p = \frac{e(\sin 2\eta)}{\rho + e(\cos 2\eta)} = \frac{\frac{e(\sin 2\eta)}{\rho}}{1 + \frac{e(\cos 2\eta)}{\rho}} \quad (3)$$

In the triangle OEC: $\rho = OE = OD + DE = \sqrt{OC^2 - DC^2} + DE$
 $OC = R$; $DC = EC \sin \langle CEO \rangle = e(\sin 2\eta)$; $DE = EC \cos \langle CEO \rangle = e(\cos 2\eta)$ and therefore
 $\rho = \sqrt{R^2 - (e(\sin 2\eta))^2} + e(\cos 2\eta) \quad (4).$

In the triangle OEM: angle $\langle AOM \rangle = \langle AOR \rangle + \langle ROM \rangle = p + m$

$OM = r$

$EM \sin \beta = r \sin (m+p)$

$EM \cos \beta = EO + r \cos (m+p).$

Dividing member by member:

DAILY MOTION OF	RELATIVE TO	DIRECTION	NUMERICAL VALUE
E S	E γ	EAST	$\omega_0 = 0^\circ; 59' 8'',33$
E O	E S	EAST	$\omega_S = 12^\circ; 11' 26'',70$
E O	E γ	EAST	$\omega_\zeta = 13^\circ; 10' 35'',03$
E K	E S	WEST	$\omega_S = 12^\circ; 11' 26'', 70$
E K	E O	WEST	$2\omega_S = 24^\circ; 22' 53'', 40$
E K	E γ	WEST	$\omega_S - \omega_0 = 11^\circ; 12' 18'',37$
O M	O R	WEST	$\omega_a = 13^\circ; 03' 53'',93$
E O	E Ω	EAST	$\omega_d = 13^\circ; 13' 45'',66$
E K	E Ω	WEST	$2\omega_S - \omega_d = 11^\circ; 09' 07'',74$

Figure 4. Movement of the moon: movement of the different vectors of figures 13 and 14.

$$\tan \beta = \frac{r \sin(m + p)}{\rho + r \cos(m + p)} \quad (5)$$

and finally

$$L(\beta) = 1(\beta) \quad (6)$$

If $\eta = 0$, we are at the mean conjunction and the mean moon is in K, the apogee of the eccentric: $\rho = R + e(\cos \eta)$ and $p = 0$.

If $\eta = 90^\circ$, we are at the quadrature and $\rho = R - e(\cos \eta)$ and $p = 0$.

If $\eta = 180^\circ$, we are at the mean opposition and the mean moon is in K, the apogee of the eccentric: $\rho = R + e(\cos \eta)$ and $p = 0$.

Example: if $2\eta = 120^\circ$ then: $\frac{e(\cos \eta)}{R} = 0.2076$, $\frac{\rho}{R} = 0.8799$ (4) and therefore $\frac{e(\cos \eta)}{\rho} = 0.2404$.

(3) gives then $\tan p = 0.2317$ and $p = 13^\circ; 02' 17''$.

In the Table 9, Hanover gives for $2\eta = 120^\circ$ a quota of the double elongation of $13^\circ; 02'$. If we consider now that the true anomaly is 95° then equation (5) gives:

$$\tan \beta = \frac{5.25 \sin 95^\circ}{0.8799 * 49.6833 + 5.25 \cos 95^\circ} = 0.1209, \text{ hence } \beta = 6^\circ; 53' 37''.$$

Hanover gives in Table 11 the quota of the true anomaly $q = \beta(2\eta = 0)$ and the angle s defined as $q + s = \beta(2\eta = 180^\circ)$.

In table 9 he gives the angle p or the quota of the double elongation and the proportion c defined by $q + c*s = \beta(2\eta)$.

$$\text{If } 2\eta = 0, \text{ then } \rho = R+e(= 60 \text{ and } \tan q = \frac{5.25 \sin 95^\circ}{60 + 5.25 \cos 95^\circ}. q = 5.0198^\circ = 5^\circ; 01' 11''.$$

$$\text{If } 2\eta = 180^\circ \text{ then } \rho = R-e(= 39.3667 \text{ and } \tan(q+s) = \frac{5.25 \sin 95^\circ}{39.3667 + 5.25 \cos 95^\circ} = 0.1344.$$

$$q + s = 7.6556^\circ = 7^\circ; 39' 20''. s = 2^\circ; 38' 09''.$$

We have seen that $\beta(2\eta=120^\circ) = 6^\circ; 53' 37'' = q + c*s$.

$$c = \frac{6^\circ;53'37'' - 5^\circ;01'11''}{2^\circ;38'09''} = 0.7109 = \frac{43}{60}.$$

Hanover gives in table 9: $p = 13^\circ; 02'$ and $c = 43$

In table 11: $q = 5^\circ; 00'$ and $s = 2^\circ 39'$

We worked with the data of Al-Battani; it is not impossible that Hanover had slightly different coefficients explaining a difference of rounding off for q and s . The tables of Hanover show that $q_{\max} = 5^\circ$ and $(q+s)_{\max} = 7^\circ; 39'$. Thus at the conjunction and the full moon, the true moon differs from its mean position by an angle inferior to 5° but in the quadrant it differs by an angle inferior to $7^\circ; 39'$. This corresponds to the effect of an equation⁴⁸ called the evection; it plays its greatest importance in the quadrant; it was already known by Hipparchus and quantified by Ptolemy. The rules of the signs of the tables can be deduced from the different figures.

Vocabulary and definitions.

<OES> = simple elongation = מסלול הפשוט

<OEK> = double elongation = מסלול הכפול

<ROM> = moon's mean anomaly = מסלול ירח האמצעי

<AOR> = quota of the double elongation = מנת מסלול הכפול

<AOM> = true anomaly = מסלול הנכון

<OEM> = equation of the center = quota of the true anomaly = מנת מסלול הנכון

Hanover gives in Table 11 of Luhot ha-Ibbur the quota of the true anomaly $q = \beta(2\eta = 0)$ and the angle s defined as $q + s = \beta(2\eta = 180^\circ)$; $s =$ מנת מסלול הנכון $\beta =$ שינוי אלכסון

In table 9 he gives the angle p or the quota of the double elongation and the proportion c defined by $q + c*s = \beta(2\eta)$; $c =$ חלק היחוס; $\beta =$ מנת מסלול הנכון or also המחובר

⁴⁸ This word was commonly used in eighteenth century (see Lalande and Delambre) with the meaning of correction.

ט מרכז הארץ ועליו עומד גלגל המזלות וסימנו **ג ב נ ד** וסדר המזלות מסבבין מן מערב למזרח⁴⁹ מטלה עד שור ועד תאומים וכו'.

ז. מרכז היוצא ועליו עומד גלגל הנושא⁵⁰ מרכז ההקפה מהירח **ה ש ז ת** ומרכזו הולך שלא כסדר המזלות דהיינו ממזרח למערב⁵¹ מנקודת **י אל ח ואל כ** ובכל יום י"א מעלות י"ב חלקים י"ט שניים: $11^{\circ} 12' 19''$

ז. מרכז גלגל קטן **ס מ ע ו** הנקרא גלגל ההקפה ומרכזו זה הולך על היקף גלגל היוצא כסדר המזלות⁵² מן **ש אל ז ואל ת ואל ה** בכל יום כ"ד מעלות כ"ב חלקים נ"ד שניים. וכאשר גובה הירח נסוג אחור ממזרח למערב⁵³ בכל יום י"א מעלות י"ב חלקים י"ט שניים, נשאר תנועת גלגל ההקפה ממערב למזרח י"ג מעלות עשרה חלקים ל"ה שניים ומהלך זה נקרא מהלך אמצע הירח.

$24^{\circ} 22' 54''$

$11^{\circ} 12' 19''$

$13^{\circ} 10' 35''$

וכאשר תגרע מהלך השמש האמצעי ביום ממהלך הירח האמצעי ביום נשאר י"ב מעלות י"א חלקים ק"ז שניים: $12^{\circ} 11' 27''$ ונקרא מהלך הירח מן מהלך השמש האמצעי ביום אחד. וכפלו, הוא המרחק מרכז ההקפה מן גובה הירח דהיינו קשת **ג ב ג ד**. למשל אם היה בנקודת **א** מקום השמש האמצעי וגם מקום הירח האמצעי דהיינו שהיה גובה הירח נקודת **ד** על נקודת **א** ומרכז ההקפה **ז** על נקודת **ש** ובאותו רגע היה מולד האמצעי בעבור שמקום השמש ומקום הירח האמצעי היו בנקודה אחת, נקודת **א**. ואז הולכת השמש כסדר המזלות ממערב למזרח יום אחד עד נקודת **ג** וכדרך הזאת הולכות מרכז ההקפה מן **ש אל ז** ונקודת גובה הירח נסוג אחור עד נקודת **ה** ויהיה לפי זה קשת **גב** שווה לקשת **גד**. וגוף הירח מתנועע בהיקף גלגל ההקפה בחלק העליון מן **מ אל ל ואל ס** שלא כסדר המזלות⁵⁴ דהיינו ממזרח למערב ובחלק התחתון מן **ו אל ע** כסדר המזלות.⁵⁵ ואלכסון מגלגל ההקפה (**ומ**)⁵⁶ [רל] נוטה תמיד אל נקודה שהיא נוכחית לנקודת יוצא מרכז דהיינו אל נקודת **כ**⁵⁷ בזה המשל. ומה שהלך הירח בהיקף גלגל ההקפה מן נקודת **ל** גובה גלגל ההקפה⁵⁸ היא הנקרא מסלול הירח האמצעי, דהיינו קשת [לס או] **לסע**. וקשת **למ** מגלגל ההקפה נקרא מנת מרחק הכפול,⁵⁹ דהיינו אם תרצה מסלול הירח האמיתי⁶⁰ שהוא קשת **מס** או **מסע** צריך אתה להוסיף קשת **למ** אל מסלול האמצעי [לס או **לסע**] אם היה מרחק הכפול פחות מן ק"ף מעלות או תגרע קשת **למ** מנת מרחק הכפול מן מסלול האמצעי ויוצא מסלול הנכון.

קו **טספ** נקרא קו האמיתי: אם היה הירח בנקודת **ס** דהיינו הוא הקו היוצא מן מרכז הארץ ועובר על גוף הירח ועד גלגל המזלות ואם היה גוף הירח על נקודת **ע** תהיה קו **טעצ** קו האמיתי ונקודת **צ** או נקודת **פ** תהיה מקום הירח האמיתי במזלות ולפ"ז תראה שלפעמים יש הפרש בין מקום אמצעי הירח, נקודת **ב**, ובין מקומו האמיתי נקודת **פ** או **צ**. וקשת זה נקרא מנת מסלול הנכון. דהיינו קשת **מס** פחות מן ק"ף ויהיה הירח בחלק המערבי [של] גלגל ההקפה תגרע זה מן מקום האמצעי אבל אם היה מסלול הנכון יתר מ- ק"ף דהיינו קשת **מסו ע** וא"כ יהיה הירח בחלק המזרחי [של] גלגל ההקפה תוסיף מנת זה אל מקום האמצעי ויוצא בשניהם מקום אמיתי מהירח.

⁴⁹ In the direct direction or counterclockwise.

⁵⁰ The deferent.

⁵¹ Clockwise.

⁵² Counterclockwise.

⁵³ Clockwise.

⁵⁴ Clockwise.

⁵⁵ Always clockwise.

⁵⁶ The drawings in the manuscript are erroneous and must be corrected.

⁵⁷ The prosneusis point.

⁵⁸ R or is l a slightly variable point called the mean apogee. The mean anomaly is measured from this point.

⁵⁹ The quota of the double elongation, angle p.

⁶⁰ The true anomaly is measured from A or מ the true anomaly.

⁶¹ The angle <OEM> or the arc כפ is the quota of the true anomaly.

ברגע המולד דהיינו שהיו אמצע השמש ואמצע הירח בנקודה אחת ואז תהיה נקודת הגובה גם באותו מקום, אז אין לירח מרחק מן השמש ואין לו מרחק הכפול. לפיכך תהיה מסלול אמצעי הוא בעצמו מסלול הנכון ואין להירח אלא מנתו במזלות והוא ברוב מרחקו חמשה מעלות להוסיף או לגרוע.⁶²

ד"ב.

ובעבור שגלגל הירח נחתך עם גלגל השמש בשתי נקודות: חצי לצפון גלגל השמש וחצי נוטה לדרום גלגל השמש לפיכך אין הירח תחת השמש אלא בשני נקודות החיתוך.⁶³ לפיכך תהיה הירח פעמים לצפון השמש ופעמים לדרום השמש ונטייה זו נקרא רוחב (השמש) [הירח] ושתי נקודות החיתוך נקראים נקודות התלי. ואותה נקודה אשר משם הירח מתחיל לנטות לצפון השמש נקרא ראש התלי.⁶⁴ והנקודה אשר משם הירח מתחיל לנטות לדרום השמש נקרא זנב התלי.⁶⁵ ומרחק שני הגלגלים תמיד חמש מעלות, לפיכך לא יבא רוחב הירח יתר על ה' מעלות. ושתי נקודות התלי אינן עוברים תמיד בנקודה אחת בגלגל השמש אלא מסובבים בגלגל השמש אחורנית ממזרח למערב שלא כסדר המזלות. לפיכך אף שהירח עומד באחת מנקודות התלי אינו תמיד במזל אחד. אלא אם היה למשל בעת ההיא המזל טלי תהיה בעת אחרת במזל דגים ואחריו במזל דלי וכן כולן. ומהלך התלי ביום אחד ג' חלקים י"א שניים '11 3' בקרוב. וכשתקבץ מהלך האמצעי ומהלך התלי ביום אחד נרחק הירח מנקודת התלי ביום אחד: י"ג מעלות י"ג חלקים מ"ו שניים '13 13' 46' בקרוב⁶⁶ ומרחק זה נקרא מסלול הרוחב, וכערך מסלול הרוחב תהיה רוחב הירח.

ד"ג.

ובעבור שהירח נראה משטח הארץ ולא ממרכז הארץ וחשבון שעשינו על מקום הירח האמיתי ועל רוחב הירח חשבנו כאלו היינו עומדים במרכז הארץ. והירח הוא קרוב לארץ כדי שיהיה הפרש בין מקומו הנראה על הארץ ובין מקומו האמיתי בעבור שהמרחק הירח מן הארץ [אינו] ערך גדול אל חצי אלכסון הארץ. לפיכך יש לירח שינוי מראה דהיינו הפרש יש למקום הירח הנראה מעל הארץ ולמקום אמיתי וההפרש או שינוי מראה זה יהיה תמיד נוטה לאופק⁶⁷ דהיינו אם הירח בחלק המזרחי נראה יותר נמוך אל האופק משהוא באמת. ולפי שמהלכו ממערב למזרח צריך להוסיף שינוי המראה אל מקומו האמיתי ויוצא מקום הנראה.⁶⁸ אבל אם נראה הירח בחלק המערבי נראה גם כן יותר נמוך אל האופק משהוא באמת ומהלכו הוא להיפך, ממערב למזרח לפיכך צריך אתה לגרוע שינוי מראה ממקומו האמיתי ויוצא מקומו הנראה.⁶⁹ השמש אין לה שינוי מראה בעבור שחצי אלכסון הארץ אין לו ערך כלל אל גודל מרחק השמש מן הארץ. לפיכך אין צריך תיקון במקום השמש האמיתי, אלא במקום הירח. וכן יש לירח שינוי מראה ברחבו כי בבהיותו נראה תמיד יותר נמוך לאופק משהוא באמת, לפיכך אם היה רחבו אמיתי צפוני דהיינו שהירח עומד יותר גבוה מאופק הדרומי בערך גלגל המזלות ואנו רואים אותו יותר נמוך ממה שהוא, בוודי יהיה רחבו צפונית הנראה פחות מרחבו האמיתי. ואם היה רוחב הירח דרומית דהיינו שהירח למטה מגלגל המזלות ויותר קרוב אל האופק מגלגל המזלות ועל ידי שינוי מראה יראה יותר נמוך אל האופק ע"כ יהיה רחבו הנראה יתר מרחבו האמיתי, לפיכך תוסיף שינוי מראה על רחבו האמיתי אם היה רחבו האמיתי דרומית ותגרע שינוי מראה מרחבו האמיתי שהיה צפונית.

⁶² The quota of the true anomaly is maximum 5°

⁶³ The nodes.

⁶⁴ The ascending node.

⁶⁵ The descending node.

⁶⁶ $13^{\circ} 10' 35.43'' + 3' 11'' = 13^{\circ} 13' 46.43''$.

⁶⁷ The effect of the parallax is always to lower the altitude of the star and near it to the horizon.

⁶⁸ This passage is not understandable. In Tekhumat ha-Shamayim ha-Arokh, the figures 18 – 24 allow explaining clearly all the rules of sign of Ma'agal, parallax and the quota of the geographical latitude.

⁶⁹ This passage is not understandable. In Tekhumat ha-Shamayim ha-Arokh, the figures 18 – 24 allow explaining clearly all the rules of sign of Ma'agal, parallax and the quota of the geographical latitude.

חלק שני והוא כולל קיצור מכל כללי התכונה.

א.

בתחילה צריך אתה לדעת שרגע עיקור שעשינו היה בשליש שעה על ליל ב' שיומו ב' לחודש ניסן משנת חמשת אלפים וארבע מאות ותשעים ליצירה.⁷⁰ והיה אז מקום השמש האמצעי ומקום גובה השמש ורום ירח האמצעי. מסלול הירח האמצעי ומקום הראש כל אחד במקומו המבואר לעיל.

ב.

קח מלוח המהלכים אמצע השמש, גובה השמש, אמצע הירח, מסלול הירח ומהלך הראש מה שהלך כל אחד מהם לפי הימים ושעות שעברו מרגע העיקור עד הרגע שתרצה לידע מקומות המאורות. ותחבר כל אחד למינו כמו שהיה ברגע העיקור ויוצא מקומו האמצעי לרגע שתרצה.

ג.

תגרע גובה השמש מן שמש האמצעי ונשאר מסלול השמש ועם מסלול הזה לך אל מנת מסלול השמש ותוציא משם מנתו. ואם היה המסלול פחות מ-ק"ף מעלות תגרע מנת הזה מן אמצע השמש ואם היה מסלול השמש יתר מ-ק"ף מעלות תוסיף מנת הזה אל אמצע השמש והיוצא בשניהם הוא יהיה מקום השמש האמיתי.

ד.

תגרע אמצע השמש מן אמצע הירח והנשאר תכפול והיוצא נקרא מרחק הכפול. ואם מרחק הכפול לך אל לוח מנת מרחק הכפול⁷¹ ותוציא משם מנתו: ואם היה מרחק הכפול פחות מ-ק"ף מעלות תוסיף מנתו אל אמצע מסלול הירח אבל אם היה מרחק הכפול יתר מ-ק"ף מעלות תגרע מנתו מן אמצע מסלול הירח והיוצא בשניהם יהיה מסלול הנכון.⁷²

ה.

וכן עם מרחק הכפול הנזכר תוציא מלוח מנת מרחק הכפול חלק היחוס⁷³ ושמור אותו בידך.

ו.

ואם מסלול הנכון לך אל לוח מנת מסלול הנכון⁷⁴ ותוציא משם מנתו ומנת זה נקרא מנת הפשוט⁷⁵ ושמור אותו בידך. וכן תוציא מלוח הזה ע"י מסלול הנכון, שינוי אלכסון.⁷⁶

ז.

תכפול חלק היחוס אשר כבר מצאנו בכלל ה' עם שינוי אלכסון,⁷⁷ ר"ל תכפול חלק היחוס עם מעלות וחלקים משינוי אלכסון ותעשה מן המעלות חלקים ומן החלקים תעשה שניים ויעלה בידך שינוי אלכסון המכוון לאותו רגע.

⁷⁰ Thus Tishri 1729. This must give an indication about the period of composition.

⁷¹ The quota of the double elongation in the table 11 of Luhot ha-Ibbur II.

⁷² The true elongation, the arc ARM or מלס.

⁷³ The proportion c, see p. 21.

⁷⁴ Quota of the true anomaly q in table 11 of Luhot ha-Ibbur II.

⁷⁵ This new denomination is from Hanover, it corresponds to $q = \beta$ ($\eta=0$)

⁷⁶ The angle s defined p. 21.

ת.

תחבר שינוי אלכסון המכוון⁷⁸ אל מנת הפשוט⁷⁹ שבידך מכלל ו' ויוצא מנת הירח המחובר.⁸⁰ ואם היה מסלול הנכון פחות מ-ק"ף תגרע מנת המחובר מן אמצע הירח אבל אם היה מסלול הנכון יתר מ-ק"ף תוסיף מנת המחובר אל אמצע הירח והיוצא בשניהם יהיה מקום הירח האמיתי ודע ברגע המולד או ברגע הניגוד שאין לו מרחק בכפול יהיה מנת הפשוט בעצמו מנת המחובר.⁸¹

ט.

תגרע אמצע הראש⁸² מן ש"ס מעלות ונשאר מקום הראש האמיתי דהיינו מקומו במזלות וכסדר המזלות בעבור שהראש הולך אחורנית.

י.

תגרע מקום הראש האמיתי מן מקום הירח האמיתי ונשאר מסלול הרוחב⁸³ ועם מסלול הרוחב לך אל לוח רוחב⁸⁴ הירח ותוציא משם רחבו ואם היה מסלול הרוחב פחות מ-ק"ף יהיה רוחב הירח צפונית אבל אם היה מסלול הרוחב יתר מ-ק"ף יהיה רוחב הירח דרומית.

י"א.

אם תרצה לדעת אם יראה הירח בירושלים ואגפיה בתחילת הלילה הסמוכה לקיבוץ האמיתי שהיה לפניו בשליש שעה אחר שקיעת החמה תעשה כסדר הזה כמו שסידר אותו הרמב"ם:

א בתחילה צריך אתה לדעת מקום השמש האמיתי ומקום הירח האמיתי ורוחב הירח ואם היה צפונית או דרומית בשליש שעה אחר שקיעת החמה האמיתית. תגרע מקום השמש האמיתי מן מקום הירח האמיתי והנשאר נקרא אורך הירח הראשון ורוחב הירח הנזכר נקרא רוחב הירח הראשון. ואם היה אורך הירח הראשון ט' מעלות או פחות ידוע תדע שאז אי אפשר שיראה הירח באותה לילה בכל ארץ ישראל ואין צריך לחשבון אחר.

ב תגרע שינוי מראה האורך מן אורך הראשון והנשאר יהיה אורך השני והא לך לוח חלקי שינוי מראה האורך:

0° 59'	אם היה מקום הירח האמיתי במזל טלה תגרע
1°	במזל שור תגרע
0° 58'	במזל תאומים תגרע
0° 53'	במזל סרטן תגרע

⁷⁷ It is the product $c * s$. See p. 21.

⁷⁸ $c * s$.

⁷⁹ q

⁸⁰ $\beta = q + c*s$. It is the angle $\langle OEM \rangle$ representing the equation of the center or the quota of the true anomaly.

⁸¹ If $\eta = 0$ then $\beta = q$

⁸² The ascending node moves clockwise or according to a retrograde movement. All the numbers of the column of the ascending node are negative and this is also the case of the radix. Thus when we subtract the absolute value of this number from 360° we get the longitude of the ascending node. The negative number of the column is called אמצע הראש while the final number obtained after the subtraction from 360° is called מקום הראש האמיתי.

⁸³ The longitude of the true moon minus the longitude of the ascending node is the quota of the lunar latitude and allows the calculation of the lunar latitude.

⁸⁴ Table 10 p. 7 in Luhot ha-Ibbur II.

0° 43'	במזל אריה תגרע
0° 37'	במזל בתולה תגרע
0° 34'	במזל מאזנים תגרע
0° 34'	במזל עקרב תגרע
0° 36'	במזל קשת תגרע
0° 44'	במזל גדי תגרע
0° 53'	במזל דלי תגרע
0° 58'	במזל דגים תגרע

ג אם היה רוחב הירח צפונית גרע שינוי מראה הרוחב מן רוחב הראשון אבל אם היה רוחב הירח דרומית תוסיף שינוי מראה הרוחב אל רוחב הראשון והיוצא נקרא רוחב הירח השני והא לך לוח שינוי מראה הרוחב:

9'	אם היה מקום הירח האמיתי במזל טלה היה שינוי מראה הרוחב
10'	במזל שור
16'	במזל תאומים
27'	במזל סרטן
38'	במזל אריה
44'	במזל בתולה
46'	במזל מאזנים
45'	במזל עקרב
44'	במזל קשת
36'	במזל גדי
24'	במזל דלי
12'	במזל דגים

ד ותבין באורך זה השני אם יהיה מקום במזלות שהן מן גדי ועד סרטן ורוחב הירח צפונית תגרע מעגל הירח מן אורך השני ואם רוחב הירח דרומית תוסיף מעגל הירח אל אורך השני.

אבל אם היה מקום הירח במזלות שהם מן סרטן ועד גדי ורוחב הירח צפונית תוסיף מעגל הירח אל אורך השני ואם רוחב הירח דרומית תגרע מעגל הירח מן אורך השני. והיוצא נקרא אורך השלישי.⁸⁵ והא לך לוח מעגל הירח: אם היה מקום הירח האמיתי:

מעשרה מעלות ממזל דגים עד עשרים מעלות במזל טלה יהיה מעגל הירח שני חומשי רוחב השני מעשרה מעלות ממזל בתולה עד עשרים מעלות במזל מאזנים יהיה מעגל הירח שני חומשי רוחב השני

מעשרים מעלות ממזל טלה עד עשר מעלות במזל שור יהיה מעגל הירח חלק שלישית רוחב הירח השני מעשרים מעלות ממזל אריה עד עשר מעלות במזל בתולה יהיה מעגל הירח חלק שלישית רוחב הירח השני מעשרים מעלות ממזל מאזנים עד עשר מעלות במזל עקרב יהיה מעגל הירח חלק שלישית רוחב הירח השני מעשרים מעלות ממזל דלי עד עשר מעלות במזל דגים יהיה מעגל הירח חלק שלישית רוחב הירח השני

⁸⁵ It is an arc of the ecliptic, he.

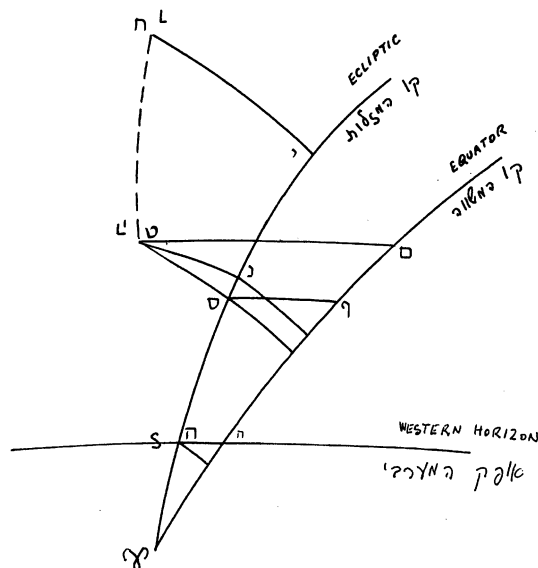


Figure 4: Schematic representation of the situation in spring at sunset in order to define with clarity all the notations. π is the geocentric(true) moon, υ is the topocentric (apparent) moon, ι is the point of ecliptic with the same longitude, σ is the point of the equator with the same right ascension. The circle of declination passing through υ (or the hour circle) is probably the ma'agal and ν is nelizat ma'agal. The aim of the procedure is to find the set lag between the sun and the apparent moon. This set lag is measured on the equator and corresponds to the arc $\beta\eta$. The arc $\eta\iota$ is the first elongation, the arc $\iota\pi$ is the parallax in longitude, the arc $\pi\sigma$ is the second elongation. The arc $\nu\sigma$ is nelizat ma'agal, the arc $\sigma\eta$ is the third elongation. The arc $\eta\gamma$ of the equator is the fourth elongation, the arc $\beta\eta$ is the quota of the geographical latitude and finally the arc $\beta\eta$ is the arc of vision. It gives the difference of set lag between the sun and the apparent moon.

The ancients could not calculate this arc from the equatorial coordinates because they did not know the formulas of transformation between different systems of coordinates. Therefore they were obliged to make this deviation and use this procedure which seems of Indian origin. R' Abraham bar Hiya in Mahalekhot ha-Kokhavim used a similar but different algorithm.

מעשר מעלות ממזל שור עד עשרים מעלות במזל שור יהיה מעגל הירח חלק רביעית רוחב השני
מעשר מעלות ממזל אריה עד עשרים מעלות במזל אריה יהיה מעגל הירח חלק רביעית רוחב השני
מעשר מעלות ממזל עקרב עד עשרים מעלות במזל עקרב יהיה מעגל הירח חלק רביעית רוחב השני
מעשר מעלות ממזל דלי עד עשרים מעלות במזל דלי יהיה מעגל הירח חלק רביעית רוחב השני

מעשרים מעלות ממזל שור ועד סופו יהיה מעגל הירח חמישית רוחב השני
מתחילת מזל אריה עד עשר מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חמישית רוחב השני
מעשרים מעלות ממזל עקרב ועד סופו יהיה מעגל הירח חמישית רוחב השני
מתחילת מזל דלי עד עשר מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חמישית רוחב השני

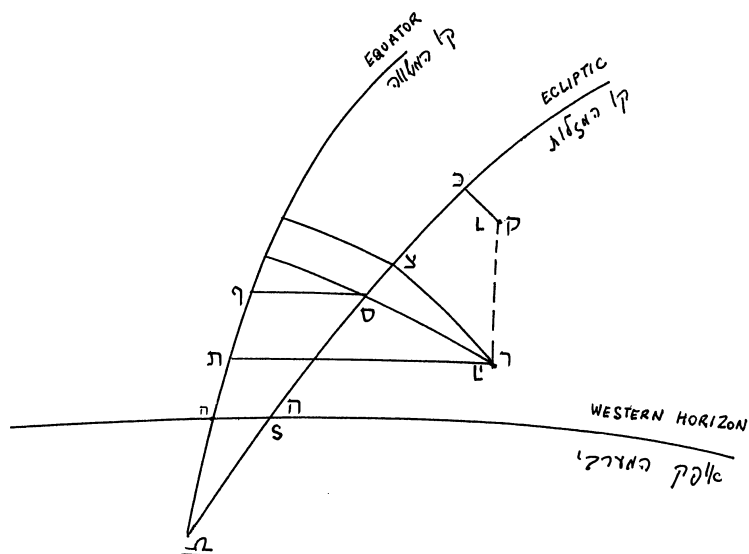


Figure 5: Figure similar to the precedent. However we are now in autumn and the latitude of the moon is to the south.

מתחילת מזל תאומים עד עשר מעלות ממנו יהיה מעגל הירח שישית רוחב השני
 מעשרים מעלות ממזל סרטן ועד סופו יהיה מעגל הירח שישית רוחב השני
 מתחילת מזל קשת עד עשר מעלות ממנו יהיה מעגל הירח שישית רוחב השני
 מעשרים מעלות ממזל גדי ועד סופו יהיה מעגל הירח שישית רוחב השני

מעשר מעלות ממזל תאומים עד עשרים מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חצי שתות רוחב השני
 מעשר מעלות ממזל סרטן עד עשרים מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חצי שתות רוחב השני
 מעשר מעלות ממזל קשת עד עשרים מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חצי שתות רוחב השני
 מעשר מעלות ממזל גדי עד עשרים מעלות ממנו יהיה מעגל הירח חצי שתות רוחב השני

מעשרים מעלות ממזל תאומים ועד חמש ועשרים ממנו יהיה מעגל הירח רביע שתות רוחב השני
 מחמש מעלות ממזל סרטן ועד עשרה מעלות ממנו יהיה מעגל הירח רביע שתות רוחב השני
 מעשרים מעלות ממזל קשת ועד חמש ועשרים ממנו יהיה מעגל הירח רביע שתות רוחב השני
 מחמש מעלות ממזל גדי ועד עשרה מעלות ממנו יהיה מעגל הירח רביע שתות רוחב השני

מחמש ועשרים מעלות ממזל תאומים עד חמש מעלות ממזל סרטן אין להם מעגל הירח
 מחמש ועשרים מעלות ממזל קשת עד חמש מעלות ממזל גדי אין להם מעגל הירח

ה ואחר שבידך אורך השלישי תבין בה. אם היה אורך השלישי:

במזל דגים או במזל טלה תוסיף על אורך השלישי שתותו
 במזל גדי או במזל תאומים תוסיף על אורך השלישי שתותו

במזל דלי או במזל שור תוסיף על אורך השלישי חמישיתו

במזל עקרב או במזל אריה תגרע מן אורך השלישי חמישיתו

במזל קשת או במזל סרטן תניח אורך השלישי כמות שהוא

במזל מאזנים או במזל בתולה תגרע מן אורך השלישי שלישייתו

ומה שיהיה אחר שתוסיף או שתגרע ממנו או תניח אותו נקרא אורך הרביעי.⁸⁶

ו' ואח"כ קח שני שלישיים מן רוחב הירח הראשון הנקרא גובה המדינה וראה אם היה רוחב הירח הראשון צפונית תוסיף גובה המדינה אל אורך הרביעי אבל אם היה רוחב הירח הראשון דרומית תגרע גובה המדינה מן אורך הרביעי והיוצא בשניהם יהיה קשת הראייה.

ז' ודע אם היה קשת הראייה ט' מעלות או פחות תדע בוודאי שאי אפשר שיראה הירח באותו לילה בכל א"י. אבל אם היה קשת הראייה יתר על ט'⁸⁷ מעלות תקבץ המעלות קשת הראייה והמעלות מאורך הראשון יחד, אם יהיה המקובץ כ"ג מעלות או יתר ידוע תדע שבוודאי יראה הירח באותו לילה בא"י. ואם יהיה המקובץ כ"א מעלות או פחות ידוע תדע שא"א שיראה הירח באותה לילה בכל א"י. ואם יהיה המקובץ כ"ב מעלות, אם יהיה בקשת הראייה חלקים נותר על המעלות תדע שיראה הירח באותה לילה בא"י. אבל אם לא יהיה בקשת הראייה חלקים יותר על המעלות, תדע שאי אפשר שיראה הירח באותו לילה בכל א"י.

ח מן העיקרים האלה יצא לנו כלל אחד: אם יהיה הזמן הנאחז בין רגע קיבוץ אמיתי ובין עת הראייה שאחריו י"ח שעות או פחות תדע בוודאי שא"א שיראה הירח באותה לילה בכל א"י ואם יהיה בין רגע קיבוץ אמיתי עד עת הראייה שאחריו יתר מ"ה⁸⁸ שעות תדע בוודאי שיראה הירח באותה לילה בכל א"י ובחודש תשרי צריכין אנו לכלל הפחות עשרים שעות ושליש מן רגע קיבוץ ועד עת הראייה ואז יוכל להיות שיראה הירח באותה לילה בכל א"י.

י"ב.

העילת מכל חשבונות הראייה שהביא הרמב"ם ז"ל והנזכרים לעיל והמצאם הרמב"ם מרוב חכמתו הם אלו:

- א. אורך הראשון הוא הקשת מגלגל המזלות הנאחז בין מקום שמש האמיתי ובין מקום ירח האמיתי ורוחב הראשון הוא המרחק בין גלגל המזלות ובין גוף כדור הירח לצפון המזלות או לדרום.
- ב. אורך השני הוא אורך הראשון אחר שתגרע ממנו שינוי מראה דהיינו קשת המזלות הנאחז ביו מקום השמש האמיתי ובין מקום הירח הנראה ורוחב השני הוא רוחב הירח הראשון אחר שהוספת או שגרעת שינוי מראה הרוחב דהיינו מרחק בין גלגל המזלות ובין הירח הנראה.
- ג. אורך השלישי הוא קשת המזלות הנאחז בין מקום השמש האמיתי ובין נקודה בגלגל המזלות בשוקע באופק ישר עם מקום הירח הנראה והבדל בין אורך השני ואורך השלישי נקרא נליזת מעגל. ואם תרצה לידע בדרך התכונה נליזת המעגל קח המצעדים מעלות המשווה העולים עם מקום הירח הנראה בערך רוחב הירח באופק ישר.⁸⁹ ועם מעלות המשווה האלו⁹⁰ תוציא

⁸⁶ It is the arc of the equator .ה' .

⁸⁷ Here Hanover does not mention the minimum value of $9^{\circ} 5'$.

⁸⁸ As far as this span of time ends at the moment of vision. But if it ends a quarter later than the moment of vision, just after the moonset then we will have to wait for another 24 hours.

⁸⁹ We consider the right ascension of the apparent Moon, taking its latitude into account. This calculation requires two steps:

1) calculation of the right ascension of the moon, neglecting its latitude with table 14 of Luhot ha-Ibbur II: we find the right ascension of the point נ in fig 4.

מעלות גלגל המזלות העולים באופק ישר עם אותם מעלות⁹¹ והבדל בין מעלות גלגל המזלות היוצאים⁹² ובין מקום הירח הנראה⁹³ הוא הנקרא נליזת המעגל.⁹⁴ ואם הייתה נקודה זו פחות ממקום הירח הנראה צריך אתה לגרוע נליזת מעגל מן אורך השני אבל אם הייתה נקודה זו יתר ממקום האמיתי תדע שצריך אתה להוסיף נליזת מעגל אל אורך השני ויוצא אורך השלישי ובעבור שהשינוי הזה בא רק בכח רוחב הירח כי אם לא היה להירח רוחב גם אין לו נליזת המעגל. משום זה נתן הרמב"ם ז"ל חלקי נליזת המעגל בערך הרוחב.

ד. אורך הרביעי הוא קשת המשווה הנאחז בין נקודת המשווה השוקע באופק ירושלים עם השמש ובין נקודת המשווה השוקע באופק ירושלים עם נקודת גלגל המזלות הנזכר בסימן הקודם דהיינו נקודת המזלות השוקע באופק ישר עם מקום הירח הנראה.⁹⁵ וההבדל בין אורך השלישי ובין אורך הרביעי הוא קשת המשווה הנערך אל קשת המזלות באורך השלישי, מה שהמשווה קצרי השקיעה או ארוכי השקיעה⁹⁶ וסדר החשבון כך הוא: תוציא שקיעה עקומה⁹⁷ לאופק א"י למקום השמש האמיתי ולנקודה במזלות הנזכר בסימן ג' וההבדל יהיה האורך רביעי ובעבור שאורך הזה נערך לקשת המשווה⁹⁸ השוקע עמו באופק ירושלים לכן כתב הרמב"ם להוסיף או לגרוע מקצת אורך השלישי לפי ערך דהיינו מה שיוסיף או יפחות חלק המשווה מקשת המזלות באותו מזל.

ה. קשת הראייה הוא קשת המשווה הנאחז בין נקודת המשווה השוקע באופק ירושלים עם השמש ובין נקודת המשווה השוקע עם הירח [הנראה] עצמו באופק ירושלים.⁹⁹ לפיכך אם יש רוחב הירח הראשון צפונית ואז שוקע הירח עכשו באופק ירושלים אחר שקיעת נקודת המשווה כנזכר בסימן הקודם, צריך להוסיף שני שלישיים מהרוחב ואם היה הירח דרומית שוקע הירח באופק ירושלים קודם שקיעת נקודת הנזכר, צריך לגרוע. ובעבור שערך קשת ההוספה או הגירעון נערך לפי רוחב הירח, כי אם לא היה לירח רוחב, הנקודה הנזכרת בסימן הקודם הוא עצמו נקודה השוקע עם הירח, לקח הרמב"ם לעולם שני שלישיית מהרוחב הראשון. ודרך החשבון בתכונה כך הוא: בתחילה צריך אתה לידע נטיית הירח ומצעדי המזלות מהשקיעה ממשווה עם הירח עצמו באופק הישר. ושנית, מידיעת הנטייה תמצא הבדל עלייה לאופק ירושלים ושלישית, תגרע הבדל העלייה הלז מן מצעדי המזלות בנטיית הדרומית או תוסיף הבדל עליית הלז למצעדי המזלות בנטיית הצפונית ויוצא שקיעה עקומה מהירח.¹⁰⁰ רביעית, תגרע שקיעה עקומה השמש מן שקיעה עקומה הירח ונשאר קשת הראייה.

ו. וקשת הראייה הזה תערוך לאורך הראשון דהיינו אם היה הזמן העובר בין שקיעת השמש ובין שקיעת הירח כדי שלישיית השעה שאפשר לראות¹⁰¹ וגם שיהיה המרחק בין השמש והירח

2) correction of this first value taking the latitude into account with table 17 of Luhot ha-Ibbur II: we find the right ascension of the point σ in fig 4.

⁹⁰ The right ascension of point σ .

⁹¹ The longitude of the point σ in fig 4.

⁹² The arc γ .

⁹³ The arc ν .

⁹⁴ The arc σ .

⁹⁵ The point σ . The point of the equator which sets together with σ is the point η . The forth elongation is the arc of the equator $\eta\sigma$.

⁹⁶ The fourth elongation represents the span of time between the set of the arc of the third elongation of the ecliptic. The forth elongation is greater or shorter than the third elongation depending whether the arcs of the ecliptic sets fast or not.

⁹⁷ In the printed edition of Tekhunat ha-Shamayim, on p. 35 there is a table giving the oblique set of the points of the ecliptic. There is no similar table in Luhot ha-Ibbur II. For a direct calculation we must calculate $\alpha + \Delta$ with $\sin \Delta = \text{tg } \varphi * \text{tg } \delta$.

⁹⁸ It is probably a mistake and we should read: לקשת המזלות.

⁹⁹ The point σ .

¹⁰⁰ The oblique set of the apparent moon is given by $\alpha + \Delta$ with $\sin \Delta = \text{tg } \varphi * \text{tg } \delta$.

¹⁰¹ In fact the arc of vision must be at least 9° , thus the set lag between the sun and the moon must be greater than 36 m.

קשת שאפשר שיראה מן הירח קצת המאיר¹⁰² ממנו אז אפשר שיראה הירח. לפיכך צריך לשער שניהם יחד.

י"ג.

אם תרצה לידע מולד אמצעי מאיזה חודש, קח שנות העולם אשר עברו מיצירה עד אותו חודש שתראה מולדו ותחלוק אותם ע"י י"ט למחזורים וקח מלוח המולדות העיקור שהיה במולד תשרי של שנת תוהו והוא ב ה ר"ד ותוסיף עליו שארית המולדות המכוונות למחזורים, שנים וחדשים שעברו ותצרפם יחד כ"א למינו ויצא לך מולד האמצעי לאותו חודש.

י"ד.

ואח"כ לך וגרע 1033411 מן שנות העולם ומהנותר תעשה מחזורים. וקח מלוח התיקונים, תיקונים המכוונים למחזורים ושנים וחדשים הנשארים ותקבצם יחד והיוצא תגרע לעולם ממולד האמצעי שהיה בידך כבר והנשאר יהיה מולד הנכון רצוני לומר, מולד האמצעי הנכון לפי חשבון התכונה ומיוסד על ירושלים תוב"ב.

ט"ו.

אם תרצה לידע רגע קיבוץ האמיתי מאיזה חודש תעשה כך:
א קח מהלך אמצע הראש ומהלך גובה השמש ואמצע מסלול הירח מן הימים ושעות שעברו מרגע העיקור ועד רגע מולד הנכון¹⁰⁴ אשר כבר בארנו בכלל י"ג (ג) [ד] שלפני זה הסימן ותוסיף הכל על העיקור כל אחד למינו ויוצא לך מקום אמצע השמש ומקום הגובה ואמצע הירח, שהוא בעצמו מקום שמש אמצעי בזו הרגע, ואמצע מסלול הירח לרגע מולד הנכון.

ב תגרע גובה השמש מן אמצע השמש ונשאר מסלול השמש. ועם מסלול הזה לך אל לוח מנת מסלול השמש ותוציא משם מנתו עם סימנו להוסיף או לגרוע ושמור בידך.¹⁰⁵

ג ועם מסלול הירח האמצעי לך אל לוח מנת מסלול הנכון וקח משם מנת הפשוט בעבור שברגע מולד הנכון אין לו מרחק הכפול ולא מנת המחובר, ושמור אותו עם סימנו להוסיף או לגרוע.¹⁰⁶

ד ואם יהיה סימן מנת השמש ומנת הירח שווים, תגרע מנת הפחות ממנת היתר.¹⁰⁷ אבל אם היו הסימנים האלו אינן שווים, תקבצם יחד¹⁰⁸ והיוצא בשניהם יהיה קשת המזלות הנאחז בין מקום שמש האמיתי ובין מקום הירח האמיתי ברגע מולד הנכון. וקשת זה נקרא מרחק מקומות האמיתיים. ודע שסימן מרחק זה יהיה תמיד בהיפוך לסימן מנת הירח, ר"ל אם היה סימן מנת הירח לגרוע יהיה סימן המרחק להוסיף ומורה שיהיה קיבוץ אמיתי אחר רגע מולד הנכון.¹⁰⁹ ואם היה סימן מנת הירח להוסיף יהיה סימן המרחק לגרוע ומורה שהיה

¹⁰² The breadth of the lunar crescent depends on the length of λ_1 .

¹⁰³ In 3411 the Jewish Molad coincided with the astronomical mean equinox according to the modern lunar theory used by Hanover in Luhot ha-Ibbur I. In Luhot ha-Ibbur II, according to the lunar theory of Maimonides, this coincidence occurred in 4506. Thus from now on Hanover calculates the true conjunction according to his "modern" theory.

¹⁰⁴ The astronomical mean conjunction which is the Molad to which a correction is brought.

¹⁰⁵ We get the true longitude of the sun.

¹⁰⁶ We get the true longitude of the moon.

¹⁰⁷ If both quotas have the same sign then the true positions of the sun and of the moon are on the same side of the common mean position. The distance between the true positions of sun and moon is the difference of the absolute values of the quotas.

¹⁰⁸ If the quotas have not the same sign, both celestial bodies are not on the same side of the common mean position and the distance between the true positions is the sum of the absolute values of the quotas.

¹⁰⁹ If the quota of the moon is negative and the quota of the sun positive, that means that the longitude of the true moon is less than the common mean longitude at the mean conjunction and the longitude of the

רגע קיבוץ אמיתי מוקדם לרגע מולד הנכון.¹¹⁰ חוץ אם היה מנת הירח פחות ממנת השמש, אז תהיה סימן המרחק שווה לסימן מנת השמש אם להוסיף אם לגרוע.¹¹¹

ה וקה מסלול הירח האמצעי עם מעלה אחת יתר או פחות ממה שהיא ברגע מולד הנכון ר"ל אם היה סימן המרחק לגרוע קח המולד ממעלה אחת פחות ואם היה סימן המרחק להוסיף קח המולד עם מעלה אחת יתר ממנו, ולך אל לוח מנת מסלול הנכון ותוציא משם מנת הפשוט ויהיה בידך שני מנות הירח ותגרע הפחות מהיתר¹¹² ותערוך: כערך מעלה אחת אל הבדל השני מנות כך ערך ל"ב חלקים וארבעים שניות¹¹³ אל הבדל מהלך הירח האמצעי והאמיתי בשעה אחת. ודע, אם היה מהלך הירח במתינות, ר"ל שהמסלול הירח האמצעי היה עד צ' מעלות ומן ר"ע עד ש"ס מעלות, תגרע הבדל המהלך הזה מן ל"ב חלקים נ"ו שניות. אבל אם הלך הירח במהירות, ר"ל שהיה מסלול הירח מן צ' עד ר"ע מעלות, תוסיף הבדל המהלך הלז על ל"ב חלקים נ"ו שניות והיוצא בשניהם יהיה מהלך הירח האמיתי בשעה חדא. ואם יהיו שני מנות הנזכרים שווים מורה שאז יהיה מהלך הירח האמצעי והאמיתי בשעה אחת גם שווים, ר"ל ל"ב חלקים נ"ו שניות.

ו וכן תעשה עם מסלול השמש ר"ל קח מסלול השמש אם מעלה אחת יתר או פחות ממה שהוא ברגע מולד הנכון כפי סימן המרחקים ולך אל לוח מנת השמש ותוציא משם מנתו ויהיה בידך שני מנות השמש. ותגרע הפחות מן היתר ותערוך: כערך מעלה אחת אל הבדל המנות כך ערך שני חלקים ח"ח שניים אל הבדל בין מהלך השמש האמצעי ובין מהלך השמש האמיתי בשעה אחת. ודע אם הולכת השמש במתינות דהיינו שהיה מסלולה עד צ' מעלות ומן ר"ע עד ש"ס מעלות, תגרע הבדל מהלך הזה מן שני חלקים ח"ח שניים.¹¹⁴ אבל אם הולכת השמש במהירות, ר"ל שהיה מסלולה מן צ' עד ר"ע מעלות, תוסיף הבדל המהלך הזה על שני חלקים ח"ח שניים ויוצא לך מהלך השמש האמיתי בשעה חדא. ואם היו שני מנות שווים, יהיה מהלך האמצעי שווה למהלך האמיתי בשעה חדא, ר"ל שני חלקים ח"ח שניים.

ז ואחר שבידך מהלח ההירח האמיתי ומהלך השמש האמיתי בשעה אחת תגרע מהלך השמש האמיתי מן מהלך הירח האמיתי והנשאר יהיה מהלך הירח מן השמש לשעה אחת.¹¹⁵ תעשה מהלך הזה לשניים וכן תעשה מרחק המאורות לשניים ותחלוק מרחק המאורות על מהלך השמש מן הירח והיוצא, שעות וחלקי תת"ף הנקרא מרחק הזמן ר"ל הזמן אשר יהיה בין רגע מולד הנכון ובין רגע קיבוץ אמיתי. תוסיף או תגרע כפי סימן המרחק, מרחק הזמן הלז אל מולד הנכון ותוציא רגע קיבוץ אמיתי.

true sun is greater. The moon has not yet recaptured the sun, the true conjunction will occur after the mean conjunction.

¹¹⁰ Here the situation is opposite: the moon has already recaptured the sun, the longitude of the moon is greater than the common mean longitude at the mean conjunction and the longitude of the sun is less. The true conjunction was before the mean conjunction.

¹¹¹ If the quotas have the same sign the true bodies are on the same side of the common mean positions. If the quotas are negative, and if the moon's quota is greater than the sun's quota in absolute value the true conjunction occurs after the mean conjunction. If the moon's quota is less than the sun's quota in absolute value the true conjunction occurs before the mean conjunction. If the quotas are positive, and if the moon's quota is greater than the sun's quota in absolute value the true conjunction occurs before the mean conjunction. If the moon's quota is less than the sun's quota in absolute value the true conjunction occurs after the mean conjunction.

¹¹² Hanover explained already this procedure of the finite differences in Luhot ha-Ibbur I, see also a paper to be issued in B.D.D. about Luhot ha-Ibbur I. If the true conjunction follows the mean conjunction we consider the mean moon and sun at the mean conjunction and the mean positions for their longitudes increased by 1°. We calculate the corresponding true positions. If the true position of the moon (or the sun) increases by more (less) than 1°, the true moon (or the sun) has a instantaneous velocity greater (less) than the mean velocity and it can be calculated by the rule of three.

¹¹³ Moon's mean angular velocity.

¹¹⁴ Sun's mean angular velocity.

¹¹⁵ Instantaneous elongation's variation velocity.

ח ואם תרצה לנסות שלא טעית בחשבונך תוציא מקום השמש האמיתי ומקום הירח האמיתי לרגע קיבוץ אמיתי שבידך ואל תצטרך למרחק הכפול ויהיו תמיד מקומות האמיתיים בשניהם בנקודה אחת. ואם תמצא שאינן שווין קח ההבדל שבניהם ועם מהלך השמש מן הירח בשעה אחת שכבר בידך תחלוק הבדל הזה ותמצא איזה חלקים שיהיו בין רגע קיבוץ אמיתי שבידך ובין רגע קיבוץ האמיתי המתוקן. ואם היה מקום הירח יתר מן מקום השמש האמיתי תגרע תיקון הזה מן רגע קיבוץ אמיתי שבידך ואם היה מקום הירח פחות מן מקום השמש האמיתי תוסיף תיקון הזה על רגע קיבוץ אמיתי שבידך ויצא לך קיבוץ האמיתי המתוקן.

ט ודע בחודש תשרי אפשר שהקיבוץ האמיתי מוקדם לאמצעי בכדי י"ד שעות ומאוחר רק בשש שעות בזמנים האלו. ובניסן אפשר שהקיבוץ האמיתי מוקדם לאמצעי בכדי שש שעות ומאוחר עד י"ד שעות. בתמוז ובטבת אפשר שיקדים או יאחר קיבוץ אמיתי לאמצעי בכדי עשר שעות. באייר, בסיון ובשבט ובאדר אפשר שיקדים יתר משש שעות אבל לא יגיע הקדימה עד י' שעות ואפשר להתאחר יתר מ-י' שעות אבל לא יגיע האיחור עד י"ד שעות. באב ובאלול, חשון וכסליו אפשר שיקדים קיבוץ אמיתי לאמצעי יתר מ-י' שעות אבל לא יגיע הקדימה ל-י"ד שעות ואפשר להתאחר יתר משש שעות אבל לא יגיע האיחור ל-י' שעות.

ט"ז.

אם תרצה לדעת תקופה האמצעי ר"ל שעה ורגע שבו יבוא השמש לראש מזל טלה או סרטן, מאזנים, גדי במהלכה האמצעי קח מנין הימים שעברו מן העיקור עד תחילת יום ר"ח ניסן בתקופת ניסן או תמוז או תשרי או טבת. וקח מהלך השמש ומהלך גובה המש לימים שעברו ותוסיף על העיקור ויוצא מקום אמצע השמש ומקום הגובה לתחילת לילה שיומו ר"ח מהחודשים הנזכרים. וראה אם יהיה מקום השמש פחות מראש המזלות הנזכרים, תוסיף עליו מהלך השמש האמצעי לימים שעות וחלקים [ומה] שהוסיף (הם) מורה יום ורגע תקופה אמצעי מתחילת ר"ח.

י"ז.

ואם תרצה לידע תקופה האמיתי תגרע מקום גובה השמש מן מקום אמצע השמש לרגע תקופה האמצעי שכבר בידך ונשאר מסלול השמש. ולך אל לוח מנת השמש ותוציא משם מנתו עם סימנו לגרוע או להוסיף¹¹⁶ ותוציא מהלך השמש האמיתי לשעה¹¹⁷ מסימן (ד) [ט"ו] אות ו' ותעשה אותה לשניים וכן תעשה מנת השמש לשניים ותחלוק מנת השמש ע"י מהלך השמש לשעה והיוצא הוא שעות וחלקי תת"ף ונקרא הבדל התקופה.¹¹⁸ וסימנו יהיה תמיד בהיפוך לסימן המנת.¹¹⁹ תוסיף או תגרע לפי סימן הבדל הזמן היוצא אל רגע תקופה האמצעי ויוצא רגע התופה האמיתי. ואם תרצה לנסות שלא טעית בחשבונך תוציא מקום השמש האמיתי לרגע תקופה האמיתי שמצאת. אם יצא לך מקום אמיתי בראש טלה או בראש סרטן או מאזנים או גדי יודע תדע שכוונת על האמת. ואם לאו קח ההבדל מה שיהיו בין מקום השמש האמיתי ובין ראש אלו המזלות ותחלקהו ע"י מהלך השמש האמיתי לשעה ותמצא כמה חלקים ושעות שטעית. ואם היה מקום השמש האמיתי להלן מראש מזלות אלו תגרע חיסרון זה ותוסיף אותה באם יהיה מקום השמש האמיתי בפחות מראש מזלות אלו שמצאת ע"י חשבון ויוצא לך תקופה האמיתי המתוקן.

י"ח.

והנה כל הזמנים הללו ר"ל רגע קיבוץ אמיתי ורגע תקופת אמיתי כולם הם לפי זמן האמצעי¹²⁰ ובעבור שאנו צריכין לדעת הזמן אמיתי¹²¹ תוציא מקום השמש האמצעי ומקום שמש האמיתי לרגע שתוציא לידע זמן אמיתי

¹¹⁶ We get the distance between the true position of the sun and the mean position of the sun.

¹¹⁷ The instantaneous angular velocity of the sun.

¹¹⁸ The span of time between true and mean tekufah.

¹¹⁹ If the quota is positive, it means that the sun is already ahead at the moment of the mean tekufah. The true tekufah was before the mean tekufah. If the quota is negative, it means that the true sun did not yet reach the longitude of the tekufah and the true tekufah will occur after the mean tekufah.

¹²⁰ The time of the tables.

¹²¹ In the time of Hanover the civil life was still organized around the true time.

ואם מקום השמש האמיתי לך אל לוח המצעדים ותוציא משם נקודת המשווה אשר עובר תחת אופן חצי היום עם השמש¹²² ותגרע המצעדים האלו ואמצע השמש הפחות מהיתר וההבדל בינם תחליף לחלקים דהיינו כל מעלה עולה ע"ב חלקי תתר"ף והיוצא יהיה הבדל בין זמן אמצעי לזמן אמיתי¹²³ ודע אם היה אמצע השמש פחות מן המצעדים תגרע הבדל הזמן מן הזמן שבידך¹²⁴ אבל אם היה אמצע השמש יתר מן המצעדים תוסיף הבדל הזמן על הזמן שבידך ותמצע רגע בזמן האמיתי.¹²⁵

י"ט.

ובעבור שכל החשבונות האלו מיוסדים על אופק ירושלים תוב"ב לפיכך ידוע תדע שאם תרצה לידע רגע מולד או רגע התקופה לאופק אחר תגרע או תוסיף מנת המדינה מלוח המדינות אל הזמן שמצאת בחשבונך לפי סימן המדינה ויצא לך הרגע באופק אחר.

ך.

אם תרצה לדעת רגע שקיעת השמש האמיתי¹²⁶ באופק ירושלים ביום מן הימים, תוציא מקום השמש האמיתי לרגע שקיעה האמצעי¹²⁷ שהיא תמיד בתחילת לילה בשעה ששית אחר חצות אותו יום ועם מקום שמש האמיתי לך אל לוח השקיעה ותוציא משם נקודת המשווה אשר שוקע עם גוף השמש. ותגרע מעלות השקיעה ואמצע השמש זה מזה, הפחות מן היתר והנשאר תחליף לחלקים לשעות ולחלקים כנזכר לעיל ותמצא הבדל השקיעה בין שקיעת האמצע ובין שקיעה האמיתי.

ך"א.

וכן תעשה אם תרצה לידע רגע עליית השמש האמיתי באופק ירושלים,¹²⁸ תוציא מקום השמש האמצעי¹²⁹ והאמיתי לרגע עליית האמצעי ר"ל בתחילת היום בשעה שישית קודם חצות אותו יום ועם מזל השביעי המנגד למקום השמש האמיתי. לך אל לוח השקיעה ותוציא משם נקודת המשווה אשר שוקעת עם נקודת המנוגד ותגרע ממנו ק"ף מעלות ונשאר עלייה העקומה אשר עולה עם גוף השמש באותו יום בשעה שישית הנזכר ותגרע עליית המשווה ואמצע השמש, הפחות מן היתר והנשאר תחליף לשעות ולחלקים כנזכר לעיל ותמצא הבדל העלייה בין עליית האמצע ובין עליית האמיתי. ודע אם היה עליית המשווה יתר מן אמצע השמש וא"כ יהיה עליית השמש האמיתי אחר האמצעי, תוסיף הבדל עלייה על עליית השמש האמיתי [שהיא] אחר עליית האמצע ר"ל על שעה שישית. אבל אם היה עליית

¹²² The right ascension α_0 of the sun.

¹²³ The equation of time $E = t_m - t_v = \alpha_0 - l_0$.

¹²⁴ Then $E = t_m - t_v > 0$ thus $t_v = t_m - E$ and true noon is before mean noon.

¹²⁵ Then $E = t_m - t_v < 0$ thus $t_v = t_m - E$ where $E < 0$, thus true noon is after mean noon.

¹²⁶ The general formula is $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta$ with $H > 0$.

Hanover makes this calculation slightly differently. He writes that sunset is 6 p.m. + Δ where

$\sin \Delta = \operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta$. Δ is found in degrees and it must be transformed in hours $15^\circ = 1$ hour. This relation is true in size and sign. Example: at summer solstice in Jerusalem $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg} 32^\circ * \operatorname{tg} 23.5^\circ = -0.27$ $H = 105.77^\circ = 7.05$ h; sunset is at 7h 03m p.m.

$\sin \Delta = \operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta = 0.27$. $H = 15.77^\circ = 1.05$ h and sunset is at 6h + 1h 03m = 7h 03m p.m.

¹²⁷ 6 p.m.

¹²⁸ The general formula is $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta$ with $H < 0$.

Hanover makes this calculation slightly differently. He writes that sunset is 6 p.m. - Δ where

$\sin \Delta = \operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta$. Δ is found in degrees and it must be transformed in hours $15^\circ = 1$ hour. This relation is true in size and sign. Example: at summer solstice in Jerusalem $\cos H = -\operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg} 32^\circ * \operatorname{tg} 23.5^\circ = -0.27$ $H = -105.77^\circ = 12 - 7.05$ h; sunset is at 4h 57m a.m.

$\sin \Delta = \operatorname{tg} \varphi * \operatorname{tg} \delta = 0.27$. $H = 15.77^\circ = 1.05$ h and sunset is at 6h - 1h 03m = 4h 57m a.m.

¹²⁹ We don't speak of the mean sun according to the definition used until now. He means a fictive sun which rises at 6 a.m. and sets at 6 p.m. as at the equator.

המשווה פחות מן אמצע השמש, ולפ"ז יהיה עלייה אמיתי קודם עלייה האמצעי, אז תגרע הבדל עלייה מן שעה שישית ויצא לך רגע עליית השמש האמיתי באותו יום ובאופק ירושלים.